



آزمون پایان ترم درس ریاضی مهندسی  
نیم سال اول ۰۴-۰۳  
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

ارزش همه سوالات با هم برابر است.

دانشکده علوم ریاضی

۱. مطلوبست حل مسئله کشی زیر

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = e^{x+y}, & -\infty < x < \infty, y \geq 0 \\ u(x, 0) = e^x, \\ u_y(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

۲. الف) آیا تابع  $u(x, y) = \sinh x \cos y + \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x})$  روی دامنه  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  می تواند مزدوج همساز داشته باشد؟ چرا؟ اگر جوابتان به سوال بلی است، مزدوج همساز تابع مذکور را به دست آورید.

ب) تابع  $v(r, \theta)$  را طوری به دست آورید تا تابع  $f(z) = r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + iv(r, \theta)$  یک تابع تحلیلی شود. مشتق این تابع را نیز به دست آورید.

۳. الف) معادله  $\tan z = i$  را حل کنید.

ب) کلیه مقادیر و مقدار اصلی  $(1-i)^{1+i}$  را بیابید.

ج) بزرگترین میدانی را که تابع  $f$  با ضابطه  $f(z) = \frac{\operatorname{Log} z^2}{-i + \tan z}$  روی آن تحلیلی است، تعیین کنید.

۴. انتگرال های مختلط زیر را حساب کنید.

ب)  $\oint_{|z|=1} e^{-\frac{1}{z}} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

الف)  $\oint_{|z|=\frac{2}{3}} e^z \tan z dz$

۵. انتگرال های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

ب)  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2 - \sin \theta} d\theta$

الف)  $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2 + 4} dx$

۶. الف) تصویر دایره  $|z|=1$  را تحت اثر نگاشت  $\omega = \frac{i-iz}{1+z}$  بیابید.

ب) تصویر ناحیه  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$  را تحت اثر نگاشت  $\omega = e^z$  به دست آورید.

پیوست: در صورت نیاز از بسط‌های مک‌لورن زیر استفاده کنید:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$