به نام خدا

آزمون میان‌ترم درس ریاضی مهندسی
نیم‌سال اول ۰۴-۰۳
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

---

۱. الف: به کمک سری فوریه کسینوسی $f(x)=(x-1)^2$، $2 \le x \le 0$، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را به‌دست آورید.

ب: به کمک تبدیل فوریه سینوسی $f(x)=xe^{-x}$، $x \ge 0$، مقدار $\int_0^{\infty} \dfrac{\omega \sin \omega}{(1+\omega^2)^2} d\omega$ را بیابید.

۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = x, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = x, & \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = 2. & \end{cases}$$

۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = x \sin 3\pi y, & 0 < x < \pi,\ -1 < y < 1 \\ u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0, & \\ u(x,-1) = u(x,1), \quad u_y(x,-1) = u_y(x,1). & \end{cases}$$

۴. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = r\theta, & 1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = 0, \quad u_\theta(r,\pi) = 0, & \\ u(1,\theta) = \theta, \quad u(2,\theta) = 0. & \end{cases}$$

۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xxt} + u + txe^{-x}, & 0 < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = xe^{-x}, \quad u_t(x,0) = 0, & \\ u(0,t) = 1, \quad u(\infty,t) = u_x(\infty,t) = 0. & \end{cases}$$

توزیع نمره.

سوال ۱: ۲۰+۲۰ نمره،
سوال ۲: ۲۰ نمره،
سوال ۳: ۲۰ نمره،
سوال ۴: ۲۰ نمره،
سوال ۵: ۲۰ نمره،
مجموع: ۱۲۰ نمره.

پیوست

در صورت نیاز از مطالب زیر استفاده کنید.

فرمول‌های اولر-فوریه:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

و

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

ضرایب فوریه مختلط:

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx.$$

تبدیل فوریه سینوسی:

$$F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx.$$

تبدیل فوریه کسینوسی:

$$F_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx.$$

تبدیل فوریه نامتناهی:

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}\,dx.$$