



دانشکده‌ی علوم ریاضی



نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

اساتید درس: آقای دکتر محسن جمالی و خانم دکتر سحر قاجار

تمرینهای سری چهارم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^N a_m \sin(m\pi t), \quad \lambda > 0, \quad \forall 1 \leq m \leq N, \lambda \neq m\pi \quad (۱)$$

$$y'' + y' + 4y = 2 \sinh(t) \quad (۲)$$

۲ پرسش دوم

مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad (۱)$$

$$y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (۲)$$

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (۳)$$

۳ پرسش سوم

برای معادله دیفرانسیل زیر ابتدا فرم جواب خصوصی با روش ضرایب نامعین را پیدا کنید و سپس آن جواب خصوصی را بیابید.

$$y'' + 4y = t^2 \sin(2t) + (6t + 7) \cos(2t)$$

۴ پرسش چهارم

جواب عمومی دو معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2} \quad (۱)$$

$$y'' - 5y' + 6y = g(t) \quad (۲)$$

۵ پرسش پنجم

جواب خصوصی تک جمله ای برای دو معادله دیفرانسیل زیر بیابید.

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 \ln x \quad (۱)$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 3x^{3/2} \sin x, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-1/2} \sin x, \quad y_2(x) = x^{-1/2} \cos x \quad (۲)$$

۶ پرسش ششم

با انتخاب نقطه t_0 در قضیه روش تغییر پارامتر، بعنوان نقطه اولیه نشان دهید جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0$$

به صورت

$$Y(t) = \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} g(s) ds$$

است. سپس مسائل مقدار اولیه زیر را با این روش حل کنید.

$$y'' - (a+b)y' + aby = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0 \quad (۱)$$

$$y'' - 2\lambda y' + (\lambda^2 + \mu^2)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0 \quad (۲)$$

$$y'' - 2ay' + a^2y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0 \quad (۳)$$

۷ پرسش هفتم

نشان دهید جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

را می توان به صورت $y = u(t) + v(t)$ نوشت که

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0, \quad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y'_0$$

و

$$v'' + p(t)v' + q(t)v = g(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0$$

است. سپس مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

۸ پرسش هشتم

نشان دهید برای بدست آوردن جواب عمومی معادله زیر

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

به شرط داشتن تنها یک جواب مانند y_1 از معادله همگن متناظر، از طریق کاهش مرتبه بدست آورد. در واقع $(t)y(t) = v(t)y_1$ که:

$$y_1(t)v''(t) + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))v' = g(t)$$

سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را از این روش بیابید.

$$t^2y'' + 7ty' + 5y = t, \quad t > 0, \quad y_1(t) = t^{-1}$$