



دانشکده‌ی علوم ریاضی



نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

اساتید درس: آقای دکتر محسن جمالی و خانم دکتر سحر قاجار

تمرینهای سری سوم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \beta, \quad \beta > 0$$

(آ) مسئله مقدار اولیه را حل کنید.

(ب) نقطه ماکسیمم (t_m, y_m) را بر حسب β بدست آورید.

(پ) کوچکترین مقدار β را که برای آن $y_m \geq 4$ برقرار باشد بدست آورید.

(ت) رفتار (t_m, y_m) را وقتی $\beta \rightarrow \infty$ بررسی کنید.

۲ پرسش دوم

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \beta, \quad \beta < 0$$

(آ) مسئله مقدار اولیه را حل کنید.

(ب) نقطه مینیمم (t_m, y_m) را بر حسب β بدست آورید.

(پ) محدوده ممکن برای مقدار β را که برای آن معادله مقدار مینیمم باشد بدست آورید.

(ت) رفتار (t_m, y_m) را وقتی $\beta \rightarrow 0$ بررسی کنید.

۳ پرسش سوم

آ معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی زیر مفروض است.

$$xy'' + 2y' + xe^x y = 0$$

فرض کنید $\{y_1, y_2\}$ یک مجموعه اساسی جواب و $W[y_1, y_2](1) = 1$ باشد. مقدار $W[y_1, y_2](5)$ را محاسبه کنید.
ب) فرض کنید $y_1 = x$ یک حل برای معادله دیفرانسیل زیر باشد.

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0, \quad y_1 = x$$

یک مجموعه اساسی جواب بیابید که y_1 عضوی از آن باشد. همچنین یک مجموعه اساسی جواب پیدا کنید که ماتریس رونسکین آن در $x = 1$ برابر با

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باشد.

۴ پرسش چهارم

معادله زیر را با تبدیل به معادله با ضرایب ثابت حل کنید.

$$ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3 y = 0, \quad t > 0.$$

۵ پرسش پنجم

مسئله مقدار اولیه زیر را بر حسب b حل کنید و مقدار بحرانی b را که جوابها را به دو دسته که دسته اول برای همه $t > 0$ ها مثبت است و دسته دوم بعد از مدتی منفی می شوند، بدست آورید.

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b$$

۶ پرسش ششم

مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 2by' + (a^2 + b^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = b, \quad a > 0 \quad (۱)$$

$$y'' - 2by' + (b^2 - a^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad a > 0 \quad (۲)$$

$$y'' - 2by' + b^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (۳)$$

۷ پرسش هفتم

نشان دهید $y_1 = \frac{1}{1-x}$ یک جواب معادله زیر است و جواب دوم آن را از طریق کاهش مرتبه بدست آورید.

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0, \quad x > 0$$

۸ پرسش هشتم

دو مسئله مقدار اولیه زیر را از طریق روش کاهش مرتبه حل کنید. (جواب بطور کامل بدست آید.)

$$x^2y'' + (y')^2 - 2xy' = 0, \quad y(2) = 5, \quad y'(2) = -4 \quad (۱)$$

$$yy'' + (y')^2 = -1, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{4}{3} \quad (۲)$$