



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری دوازدهم

۱. بسط لوران توابع زیر را حول مبدأ مختصات به دست آورید.

(الف) $f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z^2}$

(ب) $f(z) = e^z \cos \frac{1}{z}$

(ج) $f(z) = z^2 \tan \frac{1}{z}$

۲. مانده‌های تابع f با ضابطه $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2(z-1)}$ را در نقاط تکین منفردش با استفاده از بسط لوران آن به دست آورید.

۳. نوع هر یک از نقاط تکین هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

(الف) $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z-2)^2}$

(ب) $f(z) = \frac{1}{(e^z-1)z^2}$

(ج) $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$

(ه) $f(z) = z^{-4}(\sin z^4)^{-1}$

۴. مانده‌های هر یک از توابع زیر را در هر یک از نقاط تکین منفرد آن‌ها به دست آورید.

(الف) $f(z) = \frac{\sinh z}{\sin z}$

(ب) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$

(ج) $f(z) = z^{-1} \frac{1}{\sin z}$

(ه) $f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

(ز) $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{-z}}$

۵. با استفاده از انتگرال

$$\oint_{|z|=1} z^{-1} e^{az} dz$$

ثابت کنید

$$\int_0^\pi e^{a \cos t} \cos(a \sin t) dt = \pi.$$

۶. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

(الف) $\oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dx$

(ب) $\oint_{|z|=5\pi} \tan z dz$

(ج) $\oint_{|z|=1} \bar{z} \tan z d\bar{z}$

$$\oint_{|z|=\frac{\pi}{4}} \frac{(z+1)\sin z}{z^2} dz \quad (\text{د})$$

۷. انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5-4 \cos \theta} d\theta \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx \quad (\text{ج})$$