



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری هشتم

۱. عدد مختلط $\frac{(1-i)^8}{(\sqrt{3}+i)^5}$ را به شکل قطبی نمایش دهید و مقدار اصلی آوند آن را بیابید.

۲. معادله $(x, y)^2 - (x, y) + (1, 0) = 0$ را حل کنید.

۳. به دو طریق ثابت کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$|z + 4i| + |z - 4i| = 10$$

صدق می‌کنند، بیضی است.

۴. فرض کنید z و w دو عدد مختلط هستند که یا $|z| = 1$ و $|w| = 1$ اگر $|z\omega| \neq 1$ ثابت کنید

$$\left| \frac{z - \omega}{1 - \bar{z}\omega} \right| = 1.$$

۵. مجموعه نقاط زیر را بر حسب x و y بنویسید و در صفحه مشخص کنید.

$$\text{Arg} \frac{z-i}{z+i} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

$$\Re z^2 > 1 \quad (\text{ب})$$

$$\Im \frac{1}{z} < 1 \quad (\text{د})$$

$$\Im z^2 + \Re \frac{z+1}{z-1} < 0 \quad (\text{د})$$

۶. ثابت کنید معادله $z^3 + 2z + 4 = 0$ داخل دایره واحد ریشه ندارد.

۷. ثابت کنید همه ریشه‌های معادله $z^5 - (z+1)^5 = 0$ روی خط $x = -\frac{1}{4}$ واقع هستند.

۸. تمام اعداد مختلطی مانند z را بیابید که در معادله $z^3 - \bar{z} = 0$ صدق می‌کنند.

۹. فرض کنید z عدد مختلطی باشد که $\Re z > 1$. نشان دهید

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

۱۰. مقادیر زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{1+i} \bullet$$

$$\sqrt[4]{-i} \bullet$$