



دانشکده علوم ریاضی  
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا  
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری پنجم

۱. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, & x^2 + y^2 < 1, y > 0 \\ u|_{x^2+y^2=1} = xy, & u|_{y=0} = x. \end{cases}$$

۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = x^2 - y^2, & x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0 \\ u|_{x^2+y^2=1} = x + y, & u|_{x=0} = y, & u_y|_{y=0} = x. \end{cases}$$

۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = r\theta, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r|_{r=1} = \theta, & u|_{\theta=0} = r, & u_{\theta}|_{\theta=\pi} = 1. \end{cases}$$

۴. با استفاده از انتگرال فوریه مناسب درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \sin \omega x}{\omega^4 + 4} d\omega = \frac{\pi}{4} e^{-x} \cos x.$$

۵.

الف) فرض کنید تابع  $f$  در بازه  $(0, \infty)$  تعریف شده است و  $A(\omega)$  تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی آن است. ثابت کنید

$$\int_0^{\infty} A(\omega)^2 d\omega = \int_0^{\infty} f(x)^2 dx.$$

ب) رابطه مشابهی برای  $B(\omega)$  تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی بنویسید.

ج) به کمک قسمت الف) حاصل انتگرال  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$  را به دست آورید.