به نام خدا

آزمون میان‌ترم درس ریاضی مهندسی
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

دانشکده علوم ریاضی **ارزش همه سوالات با هم برابر است.**

---

۱. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x(1-|x|),\ |x| \le 1$ و $f(x+2) = f(x)$، مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را محاسبه کنید.

۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - 2u_x = x^2 t + \frac{2}{\pi}, & 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x^2, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = -1. \end{cases}$$

توجه: محاسبه کامل انتگرال‌ها در این سوال الزامی نیست.

۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} + xyt, & 0 \le x \le \pi,\ -1 \le y \le 1,\ t \ge 0 \\ u(x,y,0) = xy, \\ u(0,y,t) = 0, \quad u(\pi,y,t) = 0, \\ u(x,-1,t) = u(x,1,t), \quad u_y(x,-1,t) = u_y(x,1,t). \end{cases}$$

۴. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = r^2 \sin(\frac{3\theta}{2}), & 1 \le r \le e,\ 0 \le \theta \le \pi \\ u(1,\theta) = 1, \quad u(e,\theta) = \theta, \\ u(r,0) = 0, \quad u_\theta(r,\pi) = 0. \end{cases}$$

۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u + e^t \delta(x-1), & x \ge 0,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \\ u_x(0,t) = e^{-t}, \\ u(+\infty,t) = u_x(+\infty,t) = 0. \end{cases}$$

پیوست

در صورت نیاز از مطالب زیر استفاده کنید.

فرمول‌های اولر-فوریه:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

و

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

ضرایب فوریه مختلط:

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx.$$

تبدیل فوریه سینوسی:

$$F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx.$$

تبدیل فوریه کسینوسی:

$$F_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx.$$

تبدیل فوریه نامتناهی:

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}\,dx.$$

برای $a > 0$،

$$F(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}.$$

تعریف: به ازای $\epsilon > 0$ داده شده، **تابع ضربه** به صورت زیر

$$P_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & |x-a| < \epsilon \\ 0 & |x-a| > \epsilon \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

تعریف: حد تابع ضربه را وقتی $\epsilon \to 0$، با نماد $\delta(x-a)$ نشان می‌دهند و به آن **دلتای دیراک** می‌گویند.

تعریف: تبدیل فوریه دلتای دیراک را به صورت حد تبدیل فوریه توابع $P_\epsilon(x)$ تعریف می‌کنیم؛ یعنی

$$F(\delta(x-a)) = \lim_{\epsilon\to 0} F\big(P_\epsilon(x)\big) \quad a \in \mathbb{R} \text{ برای}$$

$$F_s(\delta(x-a)) = \lim_{\epsilon\to 0} F_s\big(P_\epsilon(x)\big) \quad a > 0 \text{ برای}$$

$$F_c(\delta(x-a)) = \lim_{\epsilon\to 0} F_c\big(P_\epsilon(x)\big) \quad a > 0 \text{ برای}$$