

(1) در هر یک از موارد زیر، دستگاه های معادلات داده شده را حل کنید یا نشان دهید که دارای جواب نیست.

$$\text{الف) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ج) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(2) نشان دهید که به ازای هر بردار x و y داریم: $(Ax, y) = (x, A^*y)$

(3) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید (برای حالت ویژه مقدارهای مختلط جواب عمومی را بر

حسب توابعی حقیقی مقدار بیان کنید.) و رفتار جواب را هنگامی که $t \rightarrow \infty$ شرح دهید. همچنین یک میدان سوها و نمودار تعدادی از مسیرهای دستگاه را رسم کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

(4) در هر مورد، جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید. همچنین یک میدان سوها و تعدادی از مسیرهای دستگاه را رسم کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x$$

(5) دستگاه $tx' = Ax$ نظیر معادله مرتبه دوم اویلر است. فرض کنید که $x = \xi t^r$ ، که در آن ξ برداری است ثابت. الف) نشان دهید که برای به دست آوردن جوابهای معادله دیفرانسیل داده شده، باید ξ و r در معادله زیر صدق کنند:

$$(A - rI)\xi = 0$$

ب) با توجه به قسمت قبل دستگاه معادلات داده شده را حل کنید. ($t > 0$)

$$tx' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x$$

(6) در هر مورد، ماتریس اساسی دستگاه معادلات داده شده را بیابید. همچنین ماتریس اساسی $\phi(t)$ را نیز که در $\phi(0) = I$ صدق می کند، به دست آورید.

الف) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$

ب) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$

(7) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را با روش ضرایب نامعین بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

(8) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را با روش تغییر پارامتر بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

(9) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را با روش قطری سازی بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x + e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(10) برای دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر به کمک تبدیل لاپلاس y_1 و y_2 را بیابید.

$$\begin{cases} y_1' - y_2' = y_2 - y_1 \\ y_1'' + y_2'' = e^t \end{cases}, y_1(0) = y_2'(0) = 0, y_1'(0) = y_2(0) = 1$$

(11) نشان دهید که $r=2$ ریشه سه گانه معادله مشخصه دستگاه زیر می باشد و سه جواب مستقل خطی این دستگاه را بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} x$$