به نام خدا

تمارین سری دوازدهم درس معادلات   مخصوص کلاس حل تمرین

1) در هر یک از مسائل زیر، جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید.

الف) $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-5) + u_{10}(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/2$

ب) $y'' + y = \delta(t-2\pi)\cos t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2) مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم:

$$y'' + y = f_k(t)\ ,\ \ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$$

که در آن $f_k(t) = \frac{[u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]}{2k}$ با قید $0 < k \leq 1$.

الف) جواب $y = \phi(t,k)$ این مسئله مقداراولیه را بیابید.

ب) حد $\lim_{k\to 0} \phi(t,k)$ را با استفاده از جواب حاصل در قسمت الف محاسبه کنید.

ج) توجه کنید که $\lim_{k\to 0} f_k(t) = \delta(t-4)$. جواب $\phi_0(t)$ مسئله مقدار اولیه داده شده، را توسط جایگزینی $\delta(t-4)$ به جای $f_k(t)$ بیابید. آیا $\phi_0(t) = \lim_{k\to 0} \phi(t,k)$ درست است ؟

د) در یک دستگاه مختصات $\phi(t,1/2)$ و $\phi(t,1/4)$ و $\phi_0(t)$ را رسم کنید. وابستگی میان آنها را توصیف کنید.

3) ویژگی های تعویض پذیری ، توزیع پذیری و شرکت پذیری را برای انتگرال تلفیقی اثبات کنید.

الف) $f * g = g * f$

ب) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

ج) $f * (g * h) = (f * g) * h$

4) با کمک نکات انتگرال تلفیقی مبدل لاپلاس تابع داده شده را بیابید.

الف) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin\tau\, d\tau$

ب) $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau\, d\tau$

5) در هر یک از مسائل زیر با استفاده از قضیه تلفیق، مبدل معکوس لاپلاس تابع داده شده را بیابید.

الف) $F(s) = \frac{1}{s^4(s^2+1)}$

ب) $F(s) = \frac{G(s)}{s^2+1}$

6) برای مسائل مقدار اولیه داده شده زیر، جواب را بر حسب انتگرال تلفیقی بیان کنید.

الف) $y'' + \omega^2 y = g(t) \qquad ; y(0) = 0 , y'(0) = 1$

ب) $y'' + 2y' + 2y = \sin \alpha t \qquad ; y(0) = 0 , y'(0) = 0$

7) معادله

$$\phi(t) + \int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi)d\xi = f(t)$$

را که در آن توابع f و k معلوم اند و ϕ مجهول است در نظر می گیریم. چون تابع مجهول ϕ در زیر علامت انتگرال آمده است، معادله مزبور را معادله انتگرالی می نامند. به ویژه این معادله به رده ای از معادلات انتگرالی تعلق دارد که به معادلات انتگرالی ولترا مشهورند. مبدل لاپلاس معادله انتگرالی مزبور را حساب کنید. و عبارتی برای $\mathscr{L}\{\phi(t)\}$ برحسب $\mathscr{L}\{f(t)\}$ و $\mathscr{L}\{k(t)\}$ به دست آورید. مبدل معکوس $\mathscr{L}\{\phi(t)\}$ جواب معادله انتگرالی داده شده است.

8) معادله انتگرالی ولترای زیر را در نظر بگیرید.

$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = \sin 2t$$

الف) نشان دهید که اگر تابع u به گونه ای باشد که $u'' = \phi(t)$ ، آنگاه

$$u''(t) + u(t) - t\,u'(0) - u(0) = \sin 2t$$

ب) نشان دهید که معادله انتگرالی مزبور با مسئله مقدار اولیه زیر هم ارز است :

$$u''(t) + u(t) = \sin 2t \; ; u(0) = 0 , u'(0) = 0$$

ج) معادله انتگرالی مزبور را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

د) مسئله مقدار اولیه قسمت ب را حل کنید. و تحقیق کنید که جواب همان است که در قسمت ج حاصل شد.

9) هر معادله داده شده زیر را به یک دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید.

الف) $u'' + 0.5\,u' + 2u = 3\sin t$

ب) $u'''' - u = 0$

ج) $t^2 u'' + t\,u' + (t^2 - 0.25)\,u = 0$

10) هر دستگاه داده شده را به یک معادله مرتبه دوم تنها تبدیل کنید. سپس با حل این معادله x_1 و x_2 را که در شرایط اولیه صدق کنند، بیابید.

الف) $x_1' = 1.25x_1 + 0.75x_2 \qquad x_1(0) = -2$

$x_2' = 0.75x_1 + 1.25x_2 \qquad x_2(0) = 1$

ب) $x_1' = 2x_2 \qquad , x_1(0) = 3$

$x_2' = -2x_1 \qquad , x_2(0) = 4$

11) اگر $A = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix}$ ، مطلوبست محاسبه

الف) A^T ب) $\bar{A}$ ج) A^*

12) ثابت کنید که اگر A عادی باشد، آنگاه A^{-1} یکتاست .

13) اگر $A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ و $B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$ ، مطلوبست :

الف) $A+3B$ ب) AB ج) $\frac{dA}{dt}$ د) $\int_0^1 A(t)\,dt$