

(1) مبدل لاپلاس را برای هر یک از توابع زیر بياييد . (n عدد صحيح مثبت و a عدد حقيقي ثابت)

الف) t

ب) t^2

ج) t^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$)

د) $t^n e^{at}$

(2) ابتدا برای تابع $f(t) = \cos bt$ ، مبدل لاپلاس را بياييد. سپس با يادآوری رابطه $\cos bt = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}$ ،

مبدل لاپلاس را برای تابع $g(t) = e^{at} \cos bt$ بياييد. a و b ثابت های حقيقي هستند.

(3) در هر یک از مسائل زیر، تبديل معکوس لاپلاس تابع داده شده را بياييد.

الف) $\frac{2s+2}{s^2+2s+5}$

ب) $\frac{2s-3}{s^2-4}$

ج) $\frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$

(4) هر یک از معادلات مقدار اوليه داده شده زیر را با استفاده از تبديل لاپلاس حل کنید.

الف) $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

ب) $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

ج) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

د) $y^{(4)} - 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$

ه) $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < \infty; \end{cases}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

5) فرض کنیم $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ باشد، می توان نشان داد که اگر f در شرایط قضیه 6.1.2 صدق کند، مشتق گیری از عبارت زیر انتگرال نسبت به پارامتر s به ازای $s > a$ مجاز است.

الف) نشان دهید که $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

ب) نشان دهید که $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$ ، پس مشتق مبدل لاپلاس، متناظر با ضرب تابع اصلی در $-t$ است.

ج) با کمک نتیجه فوق، مبدل لاپلاس توابع داده شده زیر را بیابید.

a) $t e^{at}$

b) t^n

c) $t e^{at} \sin bt$

6) در هر مورد، مبدل لاپلاس تابع داده شده را بیابید.

الف) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

ب) $f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$

ج) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$

د) $f(t) = (t-1)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$

7) در هر مورد، مبدل لاپلاس معکوس تابع داده شده را بیابید.

الف) $F(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$

ب) $F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$

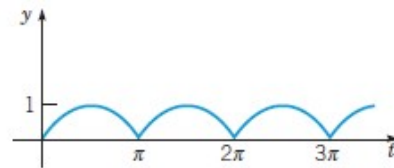
8) فرض کنیم f در $f(t+T) = f(t)$ به ازای هر $t \geq 0$ و عدد مثبت T صدق می کند. F را متناوب با دوره

تناوب T روی $0 \leq t < \infty$ می نامند. الف) نشان دهید که

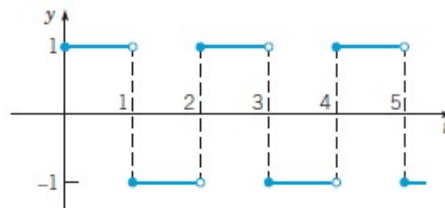
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

ب) با کمک نتیجه فوق، مبدل لاپلاس تابع داده شده را بیابید.

الف) $f(t) = \sin t, 0 \leq t < \pi, f(t + \pi) = f(t)$



ب) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \end{cases}, f(t + 2) = f(t)$



9) در هر یک از مسائل زیر، جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید.

الف) $y'' + y = f(t); y(0) = 0, y'(0) = 1; f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq t < \infty \end{cases}$

ب) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t); y(0) = 0, y'(0) = 0; g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

ج) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 1 - u_\pi(t); y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$