به نام خدا

تمارین سری دهم درس معادلات — مخصوص کلاس حل تمرین

1) در هر یک از موارد زیر، نشان دهید که معادله دیفرانسیل داده شده در $x = 0$ دارای یک نقطه تکین منتظم است. معادله شاخصی رابطه بازگشتی و ریشه های معادله شاخصی را تعیین کنید. جواب سری ($x > 0$) متناظر با ریشه بزرگتر را بیابید. اگر ریشه ها نابرابرند و تفاضل آنها یک عدد صحیح نیست، جواب سری متناظر با ریشه کوچکتر را نیز بیابید.

الف) $2xy'' + y' + xy = 0$

ب) $xy'' + y = 0$

2) معادله چبیشف به صورت زیر است

$$(1-x^2)\, y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

که در آن α مقداری ثابت است.

الف) نشان دهید که $x = 1$ و $x = -1$ نقاط تکین منتظم اند، وتوانها (exponent) را در هر یک از این نقاط تکین بیابید.

ب) دو جواب مستقل خطی حول $x = 1$ بیابید.

3) در هر مورد همه نقاط تکین منتظم معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید. معادله شاخصی و توان ها را در هر یک از نقاط تکین منتظم تعیین کنید.

الف) $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$

ب) $y'' + 4xy' + 6y = 0$

ج) $2x(x+2)\, y'' + y' - xy = 0$

د) $x^2 (1 - x)\, y'' - (1 + x)\, y' + 2xy = 0$

4) در هریک از معادلات زیر،

الف) نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه تکین منتظم معادله دیفرانسیل داده شده است.

ب) توانها را در نقطه تکین $x=0$ بیابید.

ج) نخستین سه جمله ناصفر را در هر یک از دو جواب مستقل خطی حول $x = 0$ بیابید.

A) $xy'' + y' - y = 0$

B) $xy'' + y = 0$

5) نشان دهید که معادله رتبه نیم بسل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0 \qquad , x > 0$$

را با تعویض متغیر وابسته $y = x^{1/2}\ v(x)$ می توان به معادله $v'' + v = 0$ تبدیل کرد. از اینجا نتیجه بگیرید که جوابهای معادله رتبه نیم بسل عبارتند از

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sin x \quad , \quad y_1(x) = x^{-1/2} \cos x$$

6) معادله رتبه ν بسل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad , x > 0$$

را که در آن ν حقیقی و بزرگتر از صفر است در نظر میگیریم.

الف) نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه تکین منتظم است، و ریشه های معادله شاخصی عبارتند از ν و $-\nu$.

ب) نشان دهید که یک جواب متناظر با ریشه بزرگتر ν عبارتست از :

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)(2+\nu)\ldots(m-1+\nu)(m+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$$

ج) نشان دهید که اگر 2ν یک عدد صحیح نباشد جواب دوم به صورت زیر در می آید :

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)(2-\nu)\ldots(m-1-\nu)(m-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$$

توجه کنید که وقتی $x \to 0$ ، $y_1 \to 0$ ، و وقتی $x \to 0$ ، $y_2(x)$ بی کران می شود.

د) با استفاده از روشهای مستقیم تحقیق کنید که سری های موجود در عبارات y_1 و y_2 به ازای همه مقادیر x مطلقا همگرا هستند. همچنین تحقیق کنید که y_2 تنها با این شرط که ν عدد صحیح نباشد یک جواب است.