به نام خدا

تمارین سری نهم درس معادلات

مخصوص کلاس حل تمرین

1) در هر یک از مسائل زیر شعاع همگرایی سری توانی داده شده را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n}$

د) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$

هـ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$

و) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2 (x+2)^n}{3^n}$

2) در هر مورد سری تیلور را برای تابع داده شده حول نقطه x_0 بیابید. شعاع همگرایی آنها را نیز تعیین کنید.

الف) $\mathrm{Sin}\, x \quad , \quad x_0 = 0$

ب) $\frac{1}{1+x} \quad , x_0 = 0$

ج) $\frac{1}{1-x} \quad , x_0 = 2$

3) با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ ، y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جمله ی اول هر یک ازین سری ها و ضریب x^n در جمله عمومی را بنویسید.

4) در هر مورد، عبارت داده شده را به صورت مجموعی بنویسید که جمله مولد آن شامل x^n باشد.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

ب) $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

5) در هر کدام از مسائل زیر، معادله دیفرانسیل داده شده را به وسیله ی یک سری توانی حول نقطه مفروض x_0 حل کنید. رابطه بازگشتی را بیابید. همچنین در هر یک از دو جواب مستقل خطی نخستین چهارجمله را به دست آورید و در صورت امکان در هریک از جوابها جمله عمومی را بیابید.

الف) $y'' - y = 0 , \qquad x_0 = 0$

ب) $y'' + k^2x^2y = 0 , \quad x_0 = 0,$

ج) $(2 + x^2)\, y'' - xy' + 4y = 0 , \quad x_0 = 0$

6) در هر یک از مسائل زیر یک کران پایین برای شعاع همگرایی جوابهای سری معادله دیفرانسیل داده شده حول نقطه مفروض x_0 تعیین کنید.

الف) $y'' + 4y' + 6xy = 0 ; \quad x_0 = 0 , \quad x_0 = 4$

ب) $xy'' + y = 0 ; \quad x_0 = 1$

7) (معادلات مرتبه اول) درهرکدام از مسائل زیر، معادلات دیفرانسیل داده شده را با روش سری بر حسب توانهای x حل کنید.

الف) $y' - y = 0$

ب) $(1 - x)\, y' = y$

ج) $y' + xy = 1 + x$

8) در هر یک از مسائل زیر همه نقاط تکین معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید و تعیین کنید کدام یک از این نقاط منتظم یا نا منتظم اند.

الف) $xy'' + (1 - x)\, y' + xy = 0$

ب) $x^2 (1 - x)^2\, y'' + 2xy' + 4y = 0$

ج) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (Bessel function)

د) $y'' + (\ln|x|)\, y' + 3xy = 0$

9) (نقاط تکین در بینهایت) تعاریفی که در مراحل قبل برای نقطه عادی و نقطه تکین منتظم داده شده، تنها هنگامی به کار می روند که x_0 متناهی باشد. اما در مباحث پیشرفته اغلب لازم می آید که نقطه واقع در بینهایت مورد بررسی قرار بگیرد. لذا از تغییر متغیر $\xi = \frac{1}{x}$ استفاده کرده و معادله حاصل را در $\xi = 0$ بررسی میکنند. ابتدا نشان دهید برای معادله دیفرانسیل P(x)y'' + Q(x)y' +R(x)y=0 نقطه واقع در بینهایت یک نقطه عادی است، اگر

$$\frac{1}{P(\frac{1}{\xi})}\left[\frac{2P(\frac{1}{\xi})}{\xi} - \frac{Q(\frac{1}{\xi})}{\xi^2}\right], \ \frac{R(\frac{1}{\xi})}{P(\frac{1}{\xi})\xi^4}$$

حول $\xi = 0$ دارای بسطی به سری تیلور باشند.

همچنین نشان دهید که نقطه واقع در بینهایت یک نقطه تکین منتظم است اگر حداقل یکی از دو تابع بالا دارای بسط به سری تیلور نباشد اما توابع

$$\frac{\xi}{P(\frac{1}{\xi})}\left[\frac{2P(\frac{1}{\xi})}{\xi} - \frac{Q(\frac{1}{\xi})}{\xi^2}\right], \ \frac{R(\frac{1}{\xi})}{P(\frac{1}{\xi})\xi^2}$$

هر دو دارای چنین بسطی باشند.

در معادلات زیر با کمک نتایج فوق تعیین کنید که آیا نقطه واقع در بینهایت یک نقطه عادی، تکین منظم، یا تکین نامنظم است.

الف) $(1-x^2)\, y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ (معادله لژاندر)

ب) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y=0$ (معادله بسل)