به نام خدا

تمارین سری سوم درس معادلات

مخصوص کلاس حل تمرین

1) (**معادله برنولی**) معادله دیفرانسیلی برنولی به صورت زیر بیان می شود:

$y' + p(x)y = Q(x).y^n$

می توان نشان داد با جایگزینی $u(x) = y^{1-n}$, $u'(x) = (1-n)y^{-n}\, y'$

معادله برنولی مذکور به یک معادله مرتبه اول خطی برای تابع $u(x)$ تبدیل می شود که قابل حل است.

الف) $xy' + y = xy^4$

ب) $y' + y = \frac{x}{y}$

ج) $y' + y = y^2 (\cos x - \sin x)$

د) $y' = \frac{y}{y^2x^3 \ln y - x}$

2) مطلوبست تعیین مقادیر a و b در معادله دیفرانسیل $y' = ay + b$ به طوریکه در $t \to \infty$ داشته باشیم :

الف) همه جوابها به $y = -1$ میل کنند.

ب) جواب معادله $y = 3$ باشد و جواب های دیگر به آن نزدیک شوند.

3) مسئله مقدار اولیه $y(0) = 1$ و $y' + p(t)\, y = t$ را در نظر بگیرید که در آن

$$P(t) = \begin{cases} 2t & , \; 0 \le t \le 1 \\ -1 & , \; 1 < t \end{cases}$$

است. جواب این مسئله مقدار اولیه را روی تمام اعداد حقیقی مثبت بیابید.

(دقت کنید که چنین جوابی در تمام نقاط دارای مشتق پیوسته نیست.)

4) (**معادله ریکاتی**) : ساده ترین نوع معادلات پس از معادلات خطی $y' = A(x) + B(x)\,y$ به صورت

معادله ریکاتی $y' = A(x) + B(x)\,y + C(x)\,y^2$ نوشته می شود که سمت راست آن تابعی درجه 2 از

y است. در حالت کلی معادله ریکاتی به سادگی قابل حل نیست.

الف) نشان دهید اگر y_1 یک جواب معادله ریکاتی باشد، جواب عمومی به شکل $y = y_1 + u$ است که در آن

u جواب عمومی معادله برنولی نظیر است.

ب) با روش فوق جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید (می دانیم $y_1 = x$ یک جواب ریکاتی زیر هست) :

$$y' = 1 - x^2 + y^2$$

5) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید :

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

اگر توابع P و Q توابعی همگن از درجه α باشند، یعنی :

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha}\, P(x,y)$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha}\, Q(x,y)$$

معادله دیفرانسیل مذکور را از نوع همگن گفته و می توان نشان داد با جایگزینی $y(x) = xu(x)$ ، معادله

همگن مورد نظر به یک معادله جدایی پذیر برای تابع u تبدیل خواهد شد.

الف) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy\,y' = x^2 + y^2$ را مشخص کنید.

ب) معادله دیفرانسیل $y' - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\frac{y}{x} = 0$ را حل کنید .

ج) معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}$ را حل کنید.

6) در هر یک از موارد زیر (بدون حل مسئله) بازه ای را مشخص کنید که جواب مسئله مقدارمرزی داده شده حتما در آن وجود داشته باشد.

الف) $t\,(t-4)\,y' + y = 0\ ,\ y\,(2) = 1$

ب) $y' + (\tan t)\, y = \sin t \quad , \quad y(\pi) = 0$

ج) $(\ln t)\, y' + y = \cot t \quad , \quad y(2) = 3$

7) در هر یک از موارد زیر ابتدا مساله مقدار اولیه را حل کنید و سپس مشخص کنید که بازه وجود جواب به چه صورت به y_0 وابستگی دارد؟

الف) $y' = 2t\, y^2 \quad , y(0) = y_0$

ب) $y' + y^3 = 0 \quad , y(0) = y_0$

ج) $y' = t^2 / y\,(1 + t^3) \quad , y(0) = y_0$

8) در هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر جواب عمومی را بیابید.

الف) $y'' + 2y' - 3y = 0$

ب) $y'' - 2y' - 2y = 0$

9) پاسخ مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید و رفتار جواب را برای t های بزرگ توصیف کنید.

$y'' + y' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1$

10) برای مسئله زیر مقادیر α طوری بیابید که برای $t \to \infty$ همه جوابها به صفر همگرا باشند و همچنین همه مقادیر α را بیابید که همه ی جواب های ناصفر برای $t \to \infty$ بی کران شوند.

$y'' - (2\alpha - 1)\, y' + \alpha(\alpha - 1) y = 0$

" موفق باشید "