به نام خدا

تمارین سری دوم درس معادلات   مخصوص کلاس حل تمرین

---

1) برای هر یک از موارد زیر میدان جهتی را رسم کرده و با توجه به میدان جهتی، رفتار جواب را برای t های بزرگ، توصیف کنید. در مرحله بعدی برای هر معادله دیفرانسیل جواب عمومی را با روش عامل انتگرال ساز بیابید و رفتار جواب را وقتی $t \to \infty$ میل میکند، مشخص کنید.

الف) $y' + 3y = t + e^{-2t}$

ب) $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

ج) $y' + y = t e^{-t} + 1$

د) $t y' - y = t^2 e^{-t}, \quad t > 0$

2) برای هر یک از معادلات زیر میدان جهتی را رسم کرده ورفتار جواب ها را برای t های بزرگ توصیف کنید. آیا رفتار جواب به انتخاب مقدار اولیه a بستگی دارد؟ a_0 را مقداری از a در نظر بگیرید که این تغییر رفتار رخ می دهد. مقدار a_0 را تخمین بزنید. سپس با حل معادله این مقداربحرانی را به صورت دقیق بیابید.

الف) $y' - \frac{1}{2} y = 2 \cos t, \quad y(0) = a$

ب) $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \quad y(0) = a$

3) یک تراشه ی کامپیوتری گرما را با نرخی متناسب با تفاوت دمایش با محیط اطراف، می تاباند.

الف)اگر دمای ثابت محیط 20 درجه سانتی گراد باشد، معادله دیفرانسیلی بنویسید که دمای تراشه را نسبت به زمان بر حسب دقیقه نشان دهد. معادله شما ثابتی خواهد داشت که از داده هایی که تاکنون داشتید، قابل دستیابی نیست.

ب) جواب عمومی این معادله چیست؟

ج) مشاهده میکنیم که اگر در زمان $t = 0$ تراشه را خاموش کنیم و دمای آن در آن لحظه 70 درجه سانتی گراد باشد،(دمای ثابت اتاق هم 20 درجه سانتی گراد) آنگاه در زمان $t = 10$ دقیقه دمای تراشه 60 درجه سانتی گراد خواهد بود. از این اطلاعات استفاده کنید تا معادله دیفرانسیل خود را به طور دقیق مشخص کنید.

4) یک مخزن با ظرفیت V لیتر محلول آب و نمک را در نظر بگیرید. در زمان $t = 0$ غلظت نمک در محلول موجود در مخزن را c_0 g/liter در نظر بگیرید. در ادامه محلول آب و نمک با غلظت c_1 با نرخ K liter/min به مخزن افزوده و ترکیب حاصل با همان نرخ K از مخزن خارج می شود. (با فرض اینکه محلول افزوده شده بلافاصله با محلول قبلی ترکیب شده است) غلظت نمک موجود در مخزن با گذر زمان چگونه تغییر میکند؟

$x(t)$ را مقدار نمک موجود در مخزن در لحظه t تعریف کنید. پس داریم که غلظت نمک موجود در مخزن در لحظه t برابر با $c(t) = \frac{x(t)}{V}$ می باشد.

الف) یک معادله دیفرانسیل عادی به همراه شرط اولیه برای $x(t)$ بنویسید.

ب) این معادله حاصل را با فرض اینکه محلول ورودی آب خالص باشد حل کنید. (برای سهولت ضریب K/V را a بنامید)

ج) حال این بار معادله را با فرض اینکه c_1 ثابت باشد حل کنید. $c(t)$ را مشخص کنید و $\lim_{t\to\infty} c(t)$ را بیابید. برای مقدار این حد چه حدسی می زنید؟

د) حال فرض کنید که c_1 ثابت نبوده بلکه به صورت نمایی نسبت به زمان در حال کاهش است:

$$c_1 = c_0 e^{-\alpha t} \qquad , \alpha > 0$$

با فرض $a \neq \alpha$ با حل مسئله مقدار اولیه مقدار $c(t)$ را بیابید.

حال پاسخ خود را با صفر قرار دادن α و مقایسه با جواب حاصل در قسمت ج چک کنید.

5) هرکدام از معادلات زیر را با روش جداسازی متغیر ها حل کنید.

الف) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$

ب) $y' + y^2 \sin x = 0$

6) در هر یک از موارد زیر، پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را با روش جداسازی بیابید و به صورت فرم صریح بنویسید.بازه تعریف جواب را (حداقل به صورت تقریبی) بیابید.

الف) $y' = (1-2x)\, y^2 \quad , \quad y(0) = -1/6$

ب) $y' = (e^{-x} - e^{x})/(3+4y) \quad , y(0) = 1$

ج) $dr/d\theta = r^2/\theta \quad , \quad r(1) = 2$