

سری چهارم تمرینات

تمرین ۱

در هر قسمت مشتق تابع داده شده را محاسبه کنید. سپس با استفاده از نقاط نزدیکی که مقدار آن مشخص است، مقدار تابع را در نقاط خواسته شده تقریب بزنید.

ا) تابع $z = x^y e^y$ در نقطه $x = 3, 0.5, y = -0.2$

ب) تابع $u = x \sin(x + y)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}, y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

تمرین ۲

ماتریس ژاکوبین تبدیل $f(\rho, \phi, \theta) = (x, y, z)$ را به دست آورید که در آن

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

در اینجا (ρ, ϕ, θ) مختصات کروی در دستگاه xyz می‌باشد.

تمرین ۳

صفحه مماس بر سطح تراز تابع $f(x, y, z) = ye^{-x} \sin z$ گذرا از نقطه $(0, 1, \frac{\pi}{4})$ را به دست آورید.

تمرین ۴

همه نقاطی را که نمودار دو تابع $z = x - e^y$ و $z = e^x - y$ در آن نقاط بر یکدیگر مماس می‌شوند را به دست آورید.

تمرین ۵

اگر داشته باشیم $f(x, y, z) = |r|^{-n}$ که در آن $r = xi + yj + zk$ نشان دهید $\nabla f = \frac{-nr}{|r|^{n+1}}$

سری چهارم تمرینات

تمرین ۶

نشان دهید در مختصات قطبی (r, θ) گرادیان تابع $f(r, \theta)$ برابر

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

می‌باشد که در آن بردار \hat{r} یکه در جهت بردار مکان $r = xi + yj$ است و بردار $\hat{\theta}$ یکه در سمت راست بردار \hat{r} در جهت افزایش θ می‌باشد.

تمرین ۷

در کدام جهت در نقطه (a, b, c) تابع $f(x, y, z)$ نصف حداکثر مقدار افزایش خود را در آن نقطه خواهد داشت؟

تمرین ۸

ثابت کنید اگر $\nabla f(x, y)$ بر روی دیسک $x^2 + y^2 < r$ برابر صفر باشد. آنگاه درون این دیسک تابع ثابت خواهد بود.