

## تمرین سری هفتم

## تمرین ۱

نشان دهید که تابع  $f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$  وارون پذیر است و  $(f^{-1})'(2)$  را محاسبه کنید.

## تمرین ۲

تابع یک به یک  $f$  را چنان فرض کنید که  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . با در نظر گرفتن  $y = f^{-1}(x)$ ، ثابت کنید که  $\frac{dy}{dx} = y$ .

## تمرین ۳

(آ) با فرض این که تابع  $f(x) = a^x$  در  $x = 0$  مشتق پذیر است و  $f'(0) = k \neq 0$ ، ثابت کنید که  $f$  در هر نقطه‌ی دلخواه  $x$  مشتق پذیر است و  $f'(x) = ka^x = kf(x)$ .

(ب) با استفاده از قسمت (آ) ثابت کنید که  $f^{-1}(x) = \log_a x$  در هر نقطه‌ی  $x > 0$  مشتق پذیر است و  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{kx}$ .

## تمرین ۴

برای تابع  $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}$ ، مقادیر  $f'(1)$  و  $f'(2)$  را محاسبه کنید.

## تمرین ۵

برای مقادیر ثابت  $A$  و  $B$  تعریف کنید:

$$F_{A,B}(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x.$$

(آ) ثابت کنید:  $\frac{d}{dx} F_{A,B}(x) = F_{A+B, B-A}(x)$

### تمرین سری هفتم

ب) با استفاده از قسمت (آ)،  $\frac{d^r}{dx^r} F_{A,B}(x)$  را محاسبه کنید.

ج) با استفاده از قسمت‌های (آ) و (ب)،  $\frac{d^r}{dx^r} F_{A,B}(x)$  را محاسبه کنید.

### تمرین ۶

عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ)  $\sin(\cos^{-1} x)$

ب)  $\sin(\tan^{-1} x)$

ج)  $\tan(\cos^{-1} x)$

### تمرین ۷

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

آ)  $f(x) = x \sin^{-1} x$

ب)  $f(x) = (1 + x^2) \tan^{-1} x$

ج)  $f(x) = \cos^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

### تمرین ۸

نقاط اکسترمم تابع  $f(x) = (x - 1)^{2/3} - (x + 1)^{2/3}$  را محاسبه کرده و نوع آن‌ها را (ماکسیمم یا مینیمم) مشخص کنید. سعی کنید با رسم نمودار تابع  $f$ ، مشخص کنید که کدام نقطه اکسترمم مطلق است.

### تمرین ۹

نمودار توابع زیر را رسم کنید:

آ)  $f(x) = \frac{x^r - 4x}{x^r - 1}$

ب)  $f(x) = e^{-x} \sin x$ ،  $x \geq 0$

ج)  $f(x) = \frac{\ln x}{x^r}$ ،  $x > 0$