

تمرین سری پنجم

تمرین ۱

فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[0, 1]$ باشد و $f(0) = f(1)$. برای هر n بزرگتر از یا مساوی با ۲، ثابت کنید $a \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ وجود دارد که $f(a) = f(a + \frac{1}{n})$.

تمرین ۲

درستی یا نادرستی موارد زیر را بررسی کنید. موارد درست را اثبات کنید و برای موارد غلط مثال نقض بیاورید.

(آ) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد ولی $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجود نباشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود نیست.

(ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ هر دو موجود نباشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود نیست.

(ج) اگر تابع f در a پیوست باشد، آنگاه تابع $|f|$ نیز در a پیوسته است.

(د) اگر تابع $|f|$ در a پیوست باشد، آنگاه تابع f نیز در a پیوسته است.

(ه) اگر $f(x) < g(x)$ برای هر x در یک همسایگی نقطه a ، و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ هر دو موجود باشند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

تمرین ۳

برای هر کدام از توابع زیر، معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه x_0 داده شده را در صورت وجود بدست آورید.

$$(آ) \quad x_0 = 9, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(ب) \quad x_0 = 1, f(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

$$(ج) \quad x_0 = 0, f(x) = \sqrt{|x|}$$

تمرین سری پنجم

$$.x_0 = 1, f(x) = |x^2 - 1| \quad (د)$$

$$.x_0 = \frac{\pi}{3}, f(x) = \cos^2(x) \quad (ه)$$

تمرین ۴

تمام نقاط روی منحنی $y = \frac{1}{x}$ که بر خط $y = 4x - 3$ عمودند را بیابید.

تمرین ۵

آ) نشان دهید که منحنی $y = x^2$ بر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ عمود است.

ب) برای چه مقادیری از k ، منحنی‌های $y = kx^2$ و $y = k(x-2)^2$ بر هم عمودند؟

تمرین ۶

با استفاده از تعریف، مشتق توابع زیر را در نقطه دلخواه محاسبه کنید.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (آ)$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \sqrt{2-x} \quad (ب)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (ج)$$

$$f(x) = \frac{t^2-3}{t^2+3} \quad (د)$$

تمرین ۷

با استفاده از تعریف مشتق، ثابت کنید که مشتق یک تابع زوج (فرد)، تابعی فرد (زوج) است.

تمرین ۸

با فرض این که $b < a^2$ ، نشان دهید که دو خط گذرنده از نقطه‌ی (a, b) و مماس بر منحنی $y = x^2$ وجود دارند. اگر $b = a^2$ ، چند خط مماس بر منحنی $y = x^2$ و گذرنده از نقطه‌ی (a, b) وجود دارد؟ اگر $b > a^2$ ، چند خط مماس بر منحنی $y = x^2$ و گذرنده از نقطه‌ی (a, b) وجود دارد؟

تمرین سری پنجم

تمرین ۹

به کمک قواعد مشتق‌گیری، ضابطه‌ی تابع مشتق و دامنه مشتق‌پذیری توابع زیر را بدست آورید.

$$y = \frac{1}{\sqrt{3x+4}} \quad \text{آ}$$

$$y = \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^4 \quad \text{ب}$$

$$y = \frac{x^5\sqrt{3+x^6}}{(4+x^2)^4} \quad \text{ج}$$

$$y = |1 - x^2| \quad \text{د}$$

$$y = \tan x + \cot x \quad \text{ه}$$

$$y = \frac{\sin x}{1+\cos x} \quad \text{و}$$

تمرین ۱۰

اگر m و n اعداد صحیح مثبتی باشند، ثابت کنید که مشتق تابع $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ در نقطه‌ای از بازه‌ی (a, b) صفر می‌شود.