ریاضی عمومی ۱ **(پاییز ۱۴۰۱)**

تمرین سری چهارم

تمرین ۱

برای توابع داده شده‌ی زیر مشخص کنید تابع در چه نقاطی پیوسته، یا فقط از راست پیوسته، یا فقط از چپ پیوسته و یا ناپیوسته است.

آ) $f(x) = \begin{cases} x & x < -۱ \\ x^۲ & x \geq -۱ \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۱ \\ ۰/۹۸۷ & x > ۱ \end{cases}$

تمرین ۲

مجموع دو عدد نامنفی برابر ۸ است. حداقل و حداکثر مقدار برای مجموع مربعات این دو عدد چه هستند؟ (استفاده از قوانین مشتق در حل این سوال مجاز نیست.)

تمرین ۳

فرض کنید که تابع f روی بازه‌ی بسته $[۰, ۱]$ پیوسته و برای هر $x \in [۰, ۱]$، داریم $۰ \leq f(x) \leq ۱$. ثابت کنید که $c \in [۰, ۱]$ وجود دارد که $f(c) = c$.

تمرین ۴

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که

آ) $\lim_{x \to -۱} \frac{x+۱}{x^۲-۱} = -\frac{۱}{۲}$

ب) $\lim_{x \to ۲} x^۳ = ۸$

ج) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$

د) $\lim_{x \to ۱^+} \frac{۱}{x-۱} = \infty$

ه) $\lim_{x\to\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}} = ۰$

.

تمرین ۵

با فرض این‌که $\lim_{x\to a} f(x) = M$

آ) نشان دهید $\delta > ۰$ چنان موجود است که برای هر x که $۰ < |x-a| < \delta$ داریم:

$$|f(x)| < ۱ + |M|.$$

ب) اگر $M \neq ۰$، نشان دهید $\delta > ۰$ چنان موجود است که برای هر x که $۰ < |x-a| < \delta$ داریم:

$$|f(x)| > \frac{|M|}{۲}.$$

تمرین ۶

اگر تابع f در L پیوسته و $\lim_{x\to c} g(x) = L$، آن‌گاه ثابت کنید که

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right).$$

تمرین ۷

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و c موجود باشد به‌طوری‌که $a < c < b$ و $f(a) < f(b) < f(c)$، ثابت کنید در فاصله $[a,b]$ مقدار نامتناهی زوج به صورت $(x_۱, x_۲)$ وجود دارد که $f(x_۱) = f(x_۲)$.

تمرین ۸

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و $x_n, \ldots, x_۱$ نقاط دلخواه از $[a,b]$ باشند، ثابت کنید $a \leq c \leq b$ موجود است که

$$f(c) = \frac{f(x_۱) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

تمرین ۹

تابعی بسازید که در بی‌نهایت نقطه پیوسته و در بی‌نهایت نقطه ناپیوسته باشد.

تمرین ۱۰

اگر برای تابع پیوسته f عدد a موجود باشد که $f(f(f(a))) = a$، آنگاه ثابت کنید عدد c چنان موجود است که $f(c) = c$.