ریاضی عمومی ۱ **(پاییز ۱۴۰۱)**

تمرین سری دوم

تمرین ۱

برای هر یک از زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}$، مجموعه‌های کران‌های بالا و کران‌های پایین و کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین را، در صورت وجود، پیدا کنید.

آ) $\left\{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

ب) $\left\{\frac{(-۱)^n}{n} : n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq ۰\right\}$

ج) $\{x \in \mathbb{Q} : x^۲ < ۲\}$

د) $\{x : x^۲ - x - ۱ > ۰\}$

تمرین ۲

فرض کنید A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی $\mathbb{R}$ باشند. مجموعه‌ی $A + B$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}.$$

ثابت کنید اگر A و B از بالا کران‌دار باشند، $A + B$ نیز از بالا کران‌دار است و کوچک‌ترین کران بالای $A + B$ برابر با مجموع کوچک‌ترین کران‌های بالای A و B است.

تمرین ۳

قضیه کانتور: فرض کنید $a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots < b_۳ < b_۲ < b_۱$ و به ازای هر عدد مثبت، مانند e، عددی طبیعی، مانند n، وجود دارد به نحوی که $b_n - a_n < e$. در این‌صورت، اشتراک بازه‌های $[a_n, b_n]$، $n \geq ۱$، دقیقا از یک نقطه تشکیل شده است. این قضیه را که تعمیمی از صورت اول اصل تمامیت است، ثابت کنید.

تمرین ۴

ثابت کنید که اگر دنباله‌ی $\{|a_n|\}$ کران‌دار باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز کران‌دار است.

تمرین ۵

ثابت کنید که اگر دنباله‌ی $\{|a_n|\}$ همگرا به صفر باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا به صفر است.

تمرین ۶

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را چنان در نظر بگیرید که $a_1 = 3$ و $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}$، $n = 1, 2, 3, \ldots$. نشان دهید که دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار، و در نتیجه همگراست. سپس حد این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین ۷

آ) ثابت کنید که دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.

ب) ثابت کنید که دنباله‌ی $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.

ج) ثابت کنید که دنباله‌ی $\{b_n\}$ که در قسمت (ب) این سوال معرفی شده است، از بالا کران‌دار است.

د) بر اساس نتایج بدست آمده در قسمت‌های قبل ثابت کنید که دنباله‌ی $\{b_n\}$ همگراست. حد دنباله‌ی b_n را عدد نپر می‌نامند و با e نمایش می‌دهند.

تمرین ۸

در مورد هر یک از دنباله‌های زیر موارد زیر را بررسی کنید:
۱ـ کرانداری (از بالا یا از پایین)
۲ـ مثبت یا منفی بودن
۳ـ صعودی یا نزولی یا نوسانی بودن
۴ـ همگرایی، واگرایی یا واگرایی به ∞ یا $-\infty$

آ) $\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}$

ب) $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$

ج) $\left\{\frac{e^n}{\pi^{n/2}}\right\}$

د) $\left\{\frac{(n!)^۲}{(۲n)!}\right\}$

ه) $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

تمرین ۹

حد دنباله‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

آ) $a_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

ب) $a_n = \left(\frac{n-۳}{n}\right)^n$

ج) $a_n = \frac{n}{\ln(n+۱)}$

د) $a_n = \sqrt{n^۲ + n} - \sqrt{n^۲ - ۱}$

ه) $a_n = \frac{(n!)^۲}{(۲n)!}$

و) $a_n = \frac{\pi^n}{۱+۲^{۲n}}$