



دانشکده علوم ریاضی  
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا  
ریاضی مهندسی

تمرین سری دوم- پاییز ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۱. صورت مختلط سری فوریه تابع متناوب  $f$  با دوره تناوب ۲ را که در بازه  $[0, 2]$  با ضابطه  $f(x) = x$  تعریف شده است، بیابید.

۲. صورت مختلط سری فوریه تابع متناوب  $f(x) = |\sin x|$  با دوره تناوب  $2\pi$  را روی بازه  $(-\pi, \pi)$  بیابید.

۳. با استفاده از سری فوریه تابعی مناسب و مشتق‌گیری از آن، تابع زیر را با یک سری فوریه در بازه  $(-\pi, \pi)$  نمایش دهید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

۴. با استفاده از سری‌های فوریه تابعی مناسب و انتگرال‌گیری از آن‌ها، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} = \frac{x}{4}, \quad -\pi < x < \pi \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8}, \quad 0 < x < 2\pi \quad (\text{ب})$$

۵. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتروم-لیوویل منظم زیر را بیابید. سپس، سری فوریه تعمیم‌یافته تابع  $f(x) = x$  را روی  $[0, 1]$  به دست آورید.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$$