

باسمه تعالی

آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، پائیز ۱۴۰۱، زمان آزمون: ۳ ساعت

۱- ذره P روی اشتراک استوانه $z = x^2$ و صفحه $x + y = 2$ در جهت افزایش y با تندی ثابت ۳ حرکت می‌کند. بردار سرعت این ذره را هنگامی که $P = (1, 1, 1)$ است، محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۲- توابع مشتق‌پذیر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ مفروضند. به فرض $g(q_0) = p_0$ و همه مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم تابع g در نقطه q_0 برابر صفر باشد. بعلاوه داشته باشیم:

$$p_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f(p_0) = 1, \quad \nabla f(p_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Hf(p_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad D_{q_0}g = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

آ) تقریب‌های خطی توابع f و g را در نقطه‌های p_0 و q_0 به دست آورید. (۲۰ نمره)

ب) بردار عمود بر نمودار تابع $f \circ g$ را در نقطه متناظر q_0 بدست آورید. (۱۰ نمره)

ج) بردار عمود بر مجموعه تراز $f \circ g$ را در نقطه متناظر q_0 بدست آورید.

د) همه مشتق‌های مرتبه اول و دوم تابع $f \circ g$ را در نقطه q_0 بدست آورید. (۱۰ نمره)

ه) جهت حرکت یک مورچه در \mathbb{R}^2 از نقطه q_0 چه باشد که بیشترین کاهش مقدار $f \circ g$ را مشاهده کند. (۱۰ نمره)

۳- نشان دهید که معادله

$$F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0$$

را می‌توان نسبت به z بر حسب توابعی از x و y در مجاورت نقطه $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ حل کرد. که در آن F تابعی حقیقی مقدار با مشتق‌های مرتبه اول پیوسته است. به علاوه داریم.

$$F_1(1, 1) = -1, \quad F_2(1, 1) = 2$$

در آخر مقدار $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ در نقطه $(1, 1, 0)$ محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

۴- فاصله کره واحد به مرکز مبدا و کره به شعاع ۱۰ به مرکز $(1, 2, 3)$ را در فضای سه بعدی به کمک قضیه ضریب لاگرانژ بدست آورید. (فاصله بین دو مجموعه کمترین فاصله بین نقاط آن دو مجموعه است) (۱۵ نمره)