باسمه تعالی

آزمون پایان‌ترم ریاضی عمومی ۲، زمستان ۱۴۰۱، زمان آزمون: ۳ ساعت

فرض کنید $F(x,y,z,w)$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق‌های پیوسته از $\mathbb{R}^4$ به $\mathbb{R}^2$ است و

$$D_{P_0}F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(P_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} : F(w,x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

۱- نشان دهید روی مجموعه M و نزدیک نقطه P_0 هر کدام از دو متغیر w,x,y,z را می‌توان به‌عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر دیگر نوشت و مقدار $(\frac{\partial w}{\partial x})_y$ و $(\frac{\partial w}{\partial x})_z$ را در نقطه P_0 محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۲- آیا روی مجموعه M، تابع $g(w,x,y,z) = w + x + y + z$ می‌تواند بیشینه (یا کمینه) خود را در نقطه P_0 کسب کند؟

فرض کنید C خم حاصل از برخورد صفحه $z = ax + by - 1$ با استوانه $x^2 + y^2 = 1$ است. (مقدار a و b ناصفر است.)

۳- مقدار $\int_C f \mathrm{d}s$ را برای تابع $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ محاسبه کنید.

۴- مقدار $\oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}r}$ را برای میدان برداری $F(x,y,z) = (x^2+y^2)^{-1} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ (x^2+y^2)x \end{bmatrix}$ محاسبه کنید. آیا این میدار برداری روی دامنه دلخواه می‌تواند پایستار باشد؟

فرض کنید M قسمتی از کره به مرکز $(0,0,2)$ و شعاع $\sqrt{5}$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد.

۵- مقدار انتگرال z روی M را محاسبه کنید.

۶- شار میدان برداری زیر را از سطح M (به سمت بیرون کره) محاسبه کنید.

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + (z-1)^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix}.$$