

آزمون میان ترم

سوال ۱

(۱۰ نمره) یک مثلث متساوی الاضلاع با رئوس z_1, z_2, z_3 در صفحه مختلط که مرکز ثقل آن در مبدا مختصات واقع است، در نظر بگیرید. عبارات زیر را محاسبه کنید

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}.$$

سوال ۲

(۱۰ نمره) برای هر $a > 0$ مطلوبست محاسبه حد $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$.

سوال ۳

(۱۰ نمره) در میان استوانه‌های قائم با سطح مقطع دایره و با حجم ثابت V ، آن را که کم‌ترین سطح کل (شامل سطح جانبی و دو دایره بالا و پائین) را دارد، شناسائی کنید.

سوال ۴

(۱۵ نمره) تابع $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ را در نظر بگیرید.

آ) نشان دهید دنباله‌ی $\{f^{2n}(1)\}$ صعودی، دنباله‌ی $\{f^{2n+1}(1)\}$ نزولی و $f^{2n}(1) \leq f^{2n+1}(1)$ است.

ب) حد دنباله‌های $\{f^{2n}(1)\}$ و $\{f^{2n+1}(1)\}$ چیست؟

ج) N را طوری بگیرید که اگر به جای حد دنباله از $f^n(1)$ استفاده شود، برای $n \geq N$ خطا از 10^{-3} کمتر باشد (الزاماً بهترین N مدنظر نیست).

توجه: منظور از f^n ترکیب n بار تابع f با خودش است.

آزمون میان ترم

سوال ۵

(۱۵ نمره)

آ) نشان دهید $1 - x \leq \ln x \leq \frac{x-1}{x}$ برای x های مثبت، و با کمک آن نتیجه بگیرید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 1.$$

ب) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$ به ازای چه مقادیری از α ، همگرای مطلق و یا همگرای مشروط است؟

ج) به ازای $\frac{1}{p}$ ، N را طوری بدست آورید که اگر به جای حد سری از مجموع جزئی آن S_n استفاده شود، برای $n \geq N$ خطا از 10^{-3} ناپیشتتر شود (الزاما بهترین N مدنظر نیست).

سوال ۶

(۱۰ نمره) فرض کنید برای تابع دوبار مشتق پذیر $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ داریم $|f''(x)| < 1$ به ازای هر $x \in [0, 1]$. نشان دهید اگر $f(0) = f(1)$ ، آنگاه $|f'(x)| < 1$ برای هر $x \in [0, 1]$.