**ریاضی عمومی ۱** **(زمستان ۱۴۰۱)**

# پاسخ آزمون پایان‌ترم

**مدرسین:** دکتر جمالی، دکتر خانه‌دانی، دکتر رزوان، و دکتر رنجبر **زمان آزمون:** ۲۱۰ دقیقه

## پاسخ سوال ۱

آ) با استفاده از اتحادهای مثلثاتی $\sin^۲ x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$ و $\cos^۲ x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$ داریم:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^۴ x + \cos^۴ x} = \int \frac{۲\mathrm{d}x}{۱ + \cos^۲ ۲x}$$

**(۱ نمره)**. مجددا، با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲ ۲x = \frac{۱+\cos ۴x}{۲}$ داریم:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^۴ x + \cos^۴ x} = ۴\int \frac{\mathrm{d}x}{۳ + \cos ۴x}$$

**(۱ نمره)**. حال با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos ۴x = \frac{۱-\tan^۲ ۲x}{۱+\tan^۲ ۲x}$ و تغییر متغیر $u = \tan ۲x$ داریم:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^۴ x + \cos^۴ x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{۲ + u^۲} \qquad \textbf{(۱ نمره)}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \tan^{-۱}\left(\frac{u}{\sqrt{۲}}\right) + c \qquad \textbf{(۱ نمره)}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۲}\tan ۲x}{۲}\right) + c. \qquad \textbf{(۱ نمره)}$$

ب) با استفاده از تغییر متغیر $x = \tan t$ داریم:

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(۱+x^{۲})^{۳}} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{۴} t \,\mathrm{d}t$$ **(۱ نمره)**

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{۱+\cos ۲t}{۲}\right)^{۲} \mathrm{d}t$$ **(۱ نمره)**

$$= \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(۱ + ۲\cos ۲t + \cos^{۲} ۲t\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{۱}{۴}\left(\frac{\pi}{۲} + ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۲t \,\mathrm{d}t + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos ۴t}{۲}\,\mathrm{d}t\right)$$ **(۱ نمره)**

$$= \frac{۱}{۴}\left(\frac{\pi}{۲} + ۲\underbrace{\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۲t \,\mathrm{d}t}_{۰} + \frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۲}\underbrace{\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۴t \,\mathrm{d}t}_{۰}\right)$$ **(۱ نمره)**

$$= \frac{۳\pi}{۱۶}.$$ **(۱ نمره)**

## پاسخ سوال ۲

حجم:

$$V = ۸\int_{۰}^{a} \mathrm{d}V = ۸\int_{۰}^{a} \left(\sqrt{a^{۲}-y^{۲}}\right)^{۲} \mathrm{d}y = ۸\int_{۰}^{a} (a^{۲}-y^{۲})\mathrm{d}y = ۸(a^{۳} - \frac{a^{۳}}{۳}) = \frac{۱۶a^{۳}}{۳},$$

**(۵ نمره)**.

سطح:

$$S = ۱۶\int_{۰}^{a} \sqrt{a^{۲}-y^{۲}}\mathrm{d}S = ۱۶\int_{۰}^{a} \sqrt{a^{۲}-y^{۲}}\sqrt{۱ + \left(\left(\sqrt{a^{۲}-y^{۲}}\right)'\right)^{۲}}\mathrm{d}y$$
$$= ۱۶\int_{۰}^{a} a\mathrm{d}y = ۱۶a^{۲},$$

**(۵ نمره)**.

## پاسخ سوال ۳

آ) با تعریف دنباله‌ی $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$ داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{3n-2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n-2}{3n+1}\right| = 1 \Rightarrow R = 1. \qquad \textbf{(1 نمره)}$$

مطابق قضایای درس، سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}$، در همسایگی به مرکز $x_0 = 0$ و به شعاع $R = 1$، یعنی بازه‌ی $(-1, 1)$ همگرای مطلق است **(۱ نمره)**. همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}$ را برای $x = 1$ و $x = -1$ جداگانه بررسی می‌کنیم.

- برای $x = 1$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}.$$

با توجه به این‌که برای هر عدد طبیعی $n$ داریم $a_{n+1}a_n < 0$ و $|a_{n+1}| \leq |a_n|$، و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، مطابق با آزمون لایب‌نیتز می‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$ همگراست **(۱ نمره)**.

- برای $x = -1$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3n-2}.$$

با توجه به واگرایی سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و با استفاده از آزمون مقایسه حدی می‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3n-2}$ واگراست **(۱ نمره)**.

درنتیجه، سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}$ برای هر $x \in (-1, 1]$ همگراست **(۱ نمره)**.

ب) برای هر $x \in (-1, 1)$، داریم:

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}.$$

با تغییر اندیس $n \leftarrow n-1$ داریم:

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n-3}.$$

**(۱ نمره)**. درنتیجه،

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n-3} \Rightarrow \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{3n-3}\mathrm{d}t \qquad \textbf{(1 نمره)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \qquad \textbf{(1 نمره)}$$

با استفاده از تفکیک کسر داریم

$$\frac{۱}{۱+t^{۳}}=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۱+t}+\frac{-t+۲}{۱-t+t^{۲}}\right)$$ **(۱ نمره)**

و در نتیجه:

$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}=\frac{۱}{۶}\left(\ln\left|\frac{x^{۲}+۲x+۱}{x^{۲}-x+۱}\right|+۲\sqrt{۳}\tan^{-۱}(\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}})+\frac{\pi}{\sqrt{۳}}\right).$$ **(۱ نمره)**

ج) با توجه به همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}$ در $x=۱$ و با استفاده از قضیه آبل داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}=\lim_{x\to ۱^{-}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳n-۲}x^{۳n-۲}=\frac{۱}{۶}\left(\ln ۴+۲\frac{\pi}{\sqrt{۳}}\right)=\frac{۱}{۳}\left(\ln ۲+\frac{\pi}{\sqrt{۳}}\right).$$

**(۲ نمره)**

## پاسخ سوال ۴

آ) داریم:

$$S=S_n+\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^{۲}}.$$ (۱.۰)

**(۱ نمره)** بعلاوه، با توجه به اکیدا نزولی بودن تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ روی $x>۰$، داریم:

$$\int_{k}^{k+۱}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}<\frac{۱}{k^{۲}}\Rightarrow\sum_{k=n+۱}^{\infty}\int_{k}^{k+۱}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}<\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^{۲}}$$
$$\Rightarrow\int_{n+۱}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}<\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^{۲}}$$
$$\Rightarrow S_n+\int_{n+۱}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}<S$$

**(۲ نمره)** به طور مشابه داریم:

$$\int_{k-۱}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}>\frac{۱}{k^{۲}}\Rightarrow\sum_{k=n+۱}^{\infty}\int_{k-۱}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}>\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^{۲}}$$
$$\Rightarrow\int_{n}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}>\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^{۲}}$$
$$\Rightarrow S_n+\int_{n}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}>S$$

**(۲ نمره)**. درنتیجه،

$$S_n + \int_{n+۱}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} < S < S_n + \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲}.$$

ب) با استفاده از نامساوی قسمت قبل داریم:

$$\int_{n+۱}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} < S - S_n < \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} \Rightarrow \frac{۱}{n+۱} < S - S_n < \frac{۱}{n},$$

**(۲ نمره)**. لذا، برای محاسبه بهترین $N$ که برای $n \geq N$، خطای تقریب $S$ با $S_n$ از $۱۰^{-۳}$ نابیشتر باشد، کافی است داشته باشیم $\frac{۱}{۱۰۰۰} \leq \frac{۱}{N}$ و $\frac{۱}{۱۰۰۱} \geq \frac{۱}{N+۱}$. درنتیجه، $N = ۱۰^۳$ **(۱ نمره)**.

ج) با استفاده از نامساوی قسمت (الف) داریم:

$$\begin{aligned}\left| S - \left( S_n + \frac{۱}{۲} \left( \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} + \int_{n+۱}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} \right) \right) \right| &< \frac{۱}{۲} \left( \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} - \int_{n+۱}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} \right) \\ &= \frac{۱}{۲n^۲ + ۲n}\end{aligned}$$

**(۱ نمره)**. لذا، برای این‌که خطای تقریب $S$ با $S_n + \frac{۱}{۲} \left( \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} + \int_{n+۱}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^۲} \right)$ از $۱۰^{-۳}$ نابیشتر باشد، کافی است داشته باشیم $\frac{۱}{۲n^۲+۲n} \leq ۱۰^{-۳}$، یعنی $n \geq ۲۲$ **(۱ نمره)**.

## پاسخ سوال ۵

آ) برای عدد صحیح مثبت $n$ و هر $x \in (۰, ۱]$ داریم $\ln x \leq ۰$ و $x^n > ۰$. درنتیجه،

$$f(x) = |x^n \ln x| = -x^n \ln x, \quad \forall x \in (۰, ۱],$$

**(۱ نمره)**. به این‌ترتیب، برای $x \in (۰, ۱)$ داریم:

$$f'(x) = -x^{n-۱} \left( n \ln x + ۱ \right),$$

**(۱ نمره)**. درنتیجه، $x = e^{-۱/n}$ تنها نقطه ایستای تابع $f$ در بازه‌ی $(۰, ۱]$ است **(۱ نمره)**. با توجه به پیوستگی تابع نامنفی $f$ روی بازه‌ی $(۰, ۱]$، و این‌که $\lim_{x \to ۰^+} f(x) = f(۱) = ۰$، می‌توان نتیجه گرفت که تنها نقطه ایستای تابع $f$ در بازه‌ی $(۰, ۱)$، یعنی نقطه‌ی $x = e^{-۱/n}$ ماکزیمم مطلق $|x^n \ln x|$ روی بازه‌ی $(۰, ۱]$ است. درنتیجه، مقدار ماکزیمم مطلق $f(x)$ روی بازه‌ی $(۰, ۱]$ برابر $f(e^{-۱/n}) = ۱/(ne)$ است **(۲ نمره)**. با استفاده از آزمون مشتق اول (تعیین علامت مشتق اول) یا آزمون مشتق دوم نیز می‌توان ماکزیمم مطلق بودن نقطه‌ی ایستای $x = e^{-۱/n}$ را نشان داد.

ب) **راه‌حل اول:** با استفاده از قضیه تیلور برای تابع $e^x$ حول نقطه‌ی $x = ۰$، داریم:

$$e^x - ۱ = \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^s}{(n+۱)!}x^{n+۱},$$

که در آن $s$ نقطه‌ای بین ۰ و $x$ است (**۱ نمره**). درنتیجه،

$$\int_۰^۱ (e^x - ۱)\ln x \mathrm{d}x = \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x + \int_۰^۱ \frac{e^s}{(n+۱)!}x^{n+۱}\ln x \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_۰^۱ (e^x - ۱)\ln x \mathrm{d}x - \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x = \int_۰^۱ \frac{e^s}{(n+۱)!}x^{n+۱}\ln x \mathrm{d}x \quad \textbf{(۲ نمره)}$$

$$\Rightarrow \left|\int_۰^۱ (e^x - ۱)\ln x \mathrm{d}x - \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x\right| \leq \int_۰^۱ \frac{|e^s|}{(n+۱)!}|x^{n+۱}\ln x|\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{۱}{(n+۱)(n+۱)!} \quad \textbf{(۲ نمره)}$$

که نامساوی آخر با استفاده از قسمت (الف) و این‌که $e^x \leq e$ برای هر $x \in [۰, ۱]$ حاصل شده است.

ج) **(۳ نمره)** برای این‌که خطای محاسبه‌ی $\int_۰^۱ (e^x - ۱)\ln x \mathrm{d}x$ با استفاده از $\int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x$ از $۱۰^{-۴}$ کم‌تر باشد، کافی است داشته باشیم:

$$\frac{۱}{(n+۱)(n+۱)!} \leq ۱۰^{-۴} \Rightarrow n \geq ۶. \quad \textbf{(۱ نمره)}$$

بنابراین، تقریب مورد نظر برابر است با

$$\int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{۶} \frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x = \sum_{k=۱}^{۶} \frac{۱}{k!}\int_۰^۱ x^k \ln x \mathrm{d}x \quad \textbf{(۱ نمره)}$$

$$= \sum_{k=۱}^{۶} \frac{۱}{(k+۱)(k+۱)!} \quad \textbf{(۱ نمره)}$$

که تساوی آخر از محاسبه‌ی $\int_۰^۱ x^k \ln x \mathrm{d}x$، با تکنیک انتگرال‌گیری جزء به جزء بدست آمده است.

**اشتباه رایج:** برخی با استفاده از بسط تیلور $e^x$ حول نقطه‌ی $x = ۰$، خطای تخمین انتگرال در قسمت (ب) را به صورت

$$\int_۰^۱ (e^x - ۱)\ln x \mathrm{d}x - \int_۰^۱ \ln x \sum_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x = \int_۰^۱ \ln x \left(\sum_{k=n+۱}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\mathrm{d}x$$

سپس بدون ارائه دلیل کافی، سری را از انتگرال خارج کرده‌اند. باید توجه داشت که در حالت کلی نمی‌توان سری را از انتگرال خارج کرد. برای این اشتباه یک نمره کسر شده است.

## پاسخ سوال ۶

با در نظر گرفتن افراز $x_k = \frac{k}{n}$، $k = ۰, ۱, \dots, n$ از بازه‌ی $[۰, ۱]$ و برای تابع انتگرال‌پذیر ریمان $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_۰^۱ f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{n} f\left(k/n\right). \qquad (۲.۰)$$

درنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=۱}^{n} k^p}{n^{p+۱}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{k=۰}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_۰^۱ x^p \mathrm{d}x \qquad \text{(۸ نمره)}$$
$$= \frac{۱}{p+۱}. \qquad \text{(۲ نمره)}$$

**توجه:** اگر فقط رابطه‌ی (۲.۰) نوشته شده باشد، ۳ نمره داده شده است.

## پاسخ سوال ۷

**(۱۰ نمره)** تمامی اعداد مثبت $p$ را چنان بیابید که انتگرال ناسره $\int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ همگرا باشد (با شرح دقیق محاسبات). در ابتدا توجه داریم:

$$\lim_{x\to۰^+} \frac{\frac{۱}{\sin(x^p)}}{\frac{۱}{x^p}} = \lim_{x\to۰^+} \frac{x^p}{\sin x^p} = ۱.$$

لذا، مطابق تعریف حد برای $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$، $\delta > ۰$ چنان یافت می‌شود که

$$\frac{۱}{۲x^p} \leq \frac{۱}{\sin(x^p)} \leq \frac{۳}{۲x^p}, \qquad \forall x \in (۰, \delta).$$

درنتیجه، بنا به آزمون مقایسه، دو انتگرال $\int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ و $\int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند **(۵ نمره)**. می‌دانیم $p$ـ‌انتگرال $\int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ برای $۰ < p < ۱$ همگرا و برای $p \geq ۱$ واگراست. لذا، با توجه به استدلال بالا، $\int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ نیز برای $۰ < p < ۱$ همگرا و برای $p \geq ۱$ واگراست **(۵ نمره)**.

**توجه:** تعیین بازه‌های همگرایی و واگرایی باید با استدلال درست و کامل ارائه شده باشد. در صورت عدم ارائه استدلال لازم نمره کامل داده نشده است.

**اشتباه رایج:**

- اشتباه گرفتن $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ با $\int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$.

- استفاده از آزمون مقایسه بر مبنای نامساوی $\frac{۱}{x^p} < \frac{۱}{\sin(x^p)}$ برای $x$های مثبت خیلی کوچک، تنها واگرایی انتگرال $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x^p)}$ برای $p \geq ۱$ را نتیجه می‌دهد. لذا، برای افرادی که در کنار این استدلال، دلیل کافی برای همگرایی انتگرال برای $۰ < p < ۱$ ارائه ندادند، نمره ۷ داده شده است.