



۱. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = \cos(ax)$ حاصل سری زیر را برای مقادیر غیر صحیح a بدست آورید. (۱۰ نمره)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$$

۲. یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل

$$(x^2 y')' + \lambda x^2 y = 0$$

به صورت زیر خواهد بود (این قسمت سوال را لازم نیست اثبات کنید).

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{x} + C_2 & \lambda = 0 \text{ اگر} \\ \frac{C_1 \cos \sqrt{\lambda x} + C_2 \sin \sqrt{\lambda x}}{x} & \lambda > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

با استفاده از مطلب بالا برای مساله اشتورم لیوویل زیر

$$\begin{cases} (x^2 y')' + \lambda x^2 y = 0 & 0 < x < 1 \\ y(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0 \end{cases}$$

مقادیر ویژه بزرگتر یا مساوی صفر را بدست آورده و توابع ویژه متناظر با آن ها را معرفی کنید. (۱۵ نمره)

۳. با استفاده از انتگرال فوریه مناسب، حاصل انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx$$

را بدست آورید. (تابع مناسب را می توانید تابع رو به رو در نظر بگیرید. (۱۵ نمره)

۴. نوع معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را تعیین کنید و جواب عمومی آن را بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} - \frac{y^2}{x} u_x - \frac{x^2}{y} u_y = 0$$

۵. مساله موج ناهمگن زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} - e^{-t} \sin x & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 1 & t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{x}{\pi}, u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

۶. همان طور که می دانید با استفاده از روش دالامبر در حل معادله موج، یعنی

$$\begin{cases} u_{xx} = c^2 u_{tt} & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

به جواب $u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$ رسیدیم. این مساله را صرفا با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید و به جواب مشابه قبل برسید. (۲۰ نمره)

۷. مساله قطبی زیر را به هر روشی که می توانید حل کنید. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(r, 0) = 0, u(r, \pi) = 0, u(1, \theta) = \theta & |u| < \infty \end{cases}$$

در صورت نیاز برای تبدیل یک PDE خطی مرتبه دوم که در فرم

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

است و تغییر متغیرهای $\epsilon = f(x, y)$ و $\eta = g(x, y)$ روی آن اعمال شده است. می توانید برای محاسبه فرم کلی PDE بعد از اعمال تغییر متغیرها از روابط زیر استفاده کنید.

$$\begin{aligned} A^* &= A\epsilon_x\epsilon_x + B\epsilon_x\epsilon_y + C\epsilon_y\epsilon_y \\ B^* &= 2A\epsilon_x\eta_x + B(\epsilon_x\eta_y + \epsilon_y\eta_x) + C\epsilon_y\eta_y \\ C^* &= A\eta_x\eta_x + B\eta_x\eta_y + C\eta_y\eta_y \\ D^* &= A\epsilon_{xx} + B\epsilon_{xy} + C\epsilon_{yy} + D\epsilon_x + E\epsilon_y \\ E^* &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\ F^* &= F \text{ and } G^* = G \end{aligned}$$

همچنین تبدیلات فوریه مقدماتی به شرح زیر می باشد.
اگر f و g توابعی به طور مطلق انتگرال پذیر و قطعه به قطعه پیوسته باشند.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x - c)) &= e^{i\omega c} \mathcal{F}(f)(\omega) \\ \mathcal{F}(f(cx)) &= \frac{1}{|x|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{c}\right) \\ \mathcal{F}(f') &= -i\omega \mathcal{F}(f) \\ \mathcal{F}(e^{iax} f) &= \mathcal{F}(f)(\omega - a) \\ \mathcal{F}(f(x)\cos(ax)) &= \frac{\mathcal{F}(f)(\omega - a) + \mathcal{F}(f)(\omega + a)}{2} \end{aligned}$$