



۱. به سوالات زیر در مورد اعداد مختلط پاسخ دهید. (۱۵ نمره)

(الف). برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 نشان دهید $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
(ب). مجموعه تقاطعی از صفحه که در رابطه $|z - 1 - i| = |z - 1 - 3i|$ صدق می کنند را معرفی کنید.

۲. به سوالات زیر در مورد تبدیل نگاشت های مختلط پاسخ دهید. (۱۵ نمره)

(الف). نشان دهید نگاشت $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ دایره واحد را به خط $x = \frac{1}{2}$ منتقل می کند.
(ب). نشان دهید نگاشت $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ نیم صفحه بالایی را به دایره واحد منتقل می کند.

۳. بزرگترین میدانی که تابع $f(z) = \text{Log}(z - i)$ در آن تحلیلی است را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۴. به سوالات زیر پاسخ دهید. (۲۰ نمره)

(الف). نشان دهید نگاشت $f(z) = (\ln(r))^2 - \theta^2 + i2\theta \ln(r)$ برای مقادیر $r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$ تحلیلی است و $f'(z)$ را بدست آورید.
(ب). مزدوج همساز تابع $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ را بدست آورید.

۵. انتگرال های زیر را بدست آورید. (۲۰ نمره)

(الف). انتگرال $\int_C x^2 - iy^2 dz$ را وقتی C مربعی به راس های $(1, 1), (0, 1), (0, 0), (1, 0)$ است، بدست آورید.
(ب). انتگرال $\int_C \frac{e^z}{z^2} dz$ را وقتی C خمی ژوردان است که نقطه صفر درون آن است، بدست آورید.

۶. سری لوران نگاشت $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ را در هر یک از نواحی زیر بدست آورید. (۲۰ نمره)

(الف). $0 < |z| < 1$

(ب). $1 < |z| < \infty$

۷. سری لوران تابع $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z^2+1)}$ را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$f(z) = \frac{(z+1)}{z^3} (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots)$$

به کمک این بسط حاصل انتگرال

$$\int_C \frac{z+1}{z^6(z^2+1)} dz$$

را روی خم ژوردانی که شامل صفر است ولی شامل $\pm i$ نیست، بدست آورید. (۱۵ نمره)

سوال مربوط به PDE :

۸. مساله انتقال حرارت زیر را حل کنید. (۱۵ نمره).

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x - x^2 \end{cases}$$