معادلات دیفرانسیل **(پاییز ۱۴۰۰)**

سری ششم تمرینات

تمرین ۱

در مساله مقدار اولیه زیر ابتدا جواب معادله همگن و سپس جواب معادله ناهمگن را با استفاده از روش ضرائب نامعین به دست آورید.

$$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

تمرین ۲

معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = g(t)$ را در نظر بگیرید که در آن $a, b, c > 0$ هستند.

آ) اگر $Y_1(t)$ و $Y_2(t)$ جواب معادله بالا باشند. رفتار تابع $Y_1(t) - Y_2(t)$ در $t \to \infty$ چگونه می‌باشد؟

ب) اگر $g(t) = d$ تابع ثابت باشد. ثابت کنید که هر جواب معادله بالا وقتی $t \to \infty$ به $\frac{d}{c}$ میل می‌کند. اگر $c = 0$ چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر b هم صفر باشد چطور؟

تمرین ۳

ابتدا نشان دهید که $y_1(t) = x^2$ و $y_2(t) = x^2 \ln x$ جواب‌های همگن معادله $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x$ $\quad x > 0$ می‌باشند، سپس یک جواب خاص این معادله را بیابید

تمرین ۴

فرض کنید یکی از جواب‌های معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ تابع $(1 + t^2)$ باشد و رونسکین هر دو جواب معادله ثابت باشد. جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t$$

تمرین ۵

ثابت کنید جواب‌های مساله مقدار اولیه

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0.$$

را می‌توان به‌صورت $y = u(t) + v(t)$ نوشت که در آن u و v جواب‌های دو مساله مقدار اولیه

$$\begin{aligned} &L[u] = 0, \quad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y'_0 \\ &L[v] = g(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0 \end{aligned}$$

هستند. به عبارت دیگر غیرهمگن بودن در معادله دیفرانسیل و در مقادیر اولیه را می‌توان به صورت مجزا بررسی کرد.

تمرین ۶

با انتخاب کران پایینی انتگرال در معادله نهایی جواب‌ها در روش تغییر پارامتر به عنوان نقطه اولیه t_0، ثابت کنید $Y(t)$ تبدیل می‌شود به

$$Y(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y'_2(s) - y'_1(s)y_2(s)} g(s)ds.$$

سپس ثابت کنید $Y(t)$ جوابی از مساله مقدار اولیه

$$L[y] = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

می‌باشد. بنابراین $Y(t)$ را می‌توان v در مساله قبل فرض کرد.

ثابت کنید جواب مساله مقدار اولیه

$$y'' + y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

عبارت است از $y = \int_{t_0}^{t} \sin(t-s)g(s)ds$

ثابت کنید جواب مساله مقدار اولیه

$$L[y] = (D^2 + bD + c)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0$$

که در آن $b^2 - 4c > 0$ می‌باشد برابر $y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t-s)g(s)ds$ می‌باشد که تابع K تنها به جواب‌های معادله همگن بستگی دارد. به انتگرال بالا پیچش [1] K و g می‌گوییم.

[1] convolution