معادلات دیفرانسیل **(پاییز ۱۴۰۰)**

سری چهارم تمرینات

تمرین ۱

مساله مقدار اولیه $y''-y'-2y=0, \quad y(0)=\alpha, \quad y'(0)=2$ را حل کنید. سپس α را طوری تعیین کنید که وقتی $t\to\infty$، جواب به صفر میل کند.

تمرین ۲

بدون حل معادله، بزرگ ترین بازه‌ای که معادله زیر در آن جواب یکتا و دوبار مشتق پذیر دارد را بیابید.

$$y''+(\cos t)y'+(\ln|x|)y=0, \quad y(-2)=2, \quad y'(-2)=1.$$

تمرین ۳

تحقیق کنید که $y_1(t)=1$ و $y_2(t)=t^{\frac{1}{2}}$ به ازای $t>0$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $yy''+(y')^2=0$ هستند. سپس ثابت کنید که $y=c_1+c_2t^{\frac{1}{2}}$ در حالت کلی جواب معادله نیست. توضیح دهید چرا این نتیجه اصل برهم‌نهی را نقض نمی‌کند؟

تمرین ۴

آیا $y=\sin t^2$ می‌تواند جواب معادله $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ با ضرایب پیوسته در بازه‌ای شامل $t=0$ باشد؟

تمرین ۵

آ) اگر رانسکین $f=e^{3t}$ و g برابر $2e^{6t}$ باشد. آنگاه g را بیابید.

ب) اگر y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله دیفرانسیل $ty''+2y'+te^ty=0$ را تشکیل بدهند و اگر $W(y_1,y_2)(1)=3$ آنگاه مقدار $W(y_1,y_2)(5)$ را بیابید.

تمرین ۶

فرض کنید که $p(t)$ و $q(t)$ توابعی پیوسته روی بازه I باشند و $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰$ روی این بازه هستند.

آ) ثابت کنید اگر $y_۱$ و $y_۲$ نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه‌ای از I داشته باشند. آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها را تشکیل دهند.

ب) ثابت کنید اگر $y_۱$ و $y_۲$ نقطه عطف مشترک در $t_۰ \in I$ داشته باشند آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها در آن بازه باشند مگر اینکه p و q هر دو در $t_۰$ صفر باشند.

تمرین ۷

مساله مقدار اولیه

$$y'' + ۲y' + ۶y = ۰, \quad y(۰) = ۲, \quad y'(۰) = \alpha \geq ۰$$

را در نظر بگیرید.

آ) جواب مساله را بیابید.

ب) α را طوری بیابید که داشته باشیم $y(۱) = ۰$

ج) کوچک ترین مقدار مثبت t را بر حسب α بیابید که به ازای آن جواب صفر شود.

د) حد عبارت پیدا شده در قسمت قبل را وقتی $\alpha \to \infty$ به دست آورید.