

سری دوم تمرینات

تمرین ۱

نشان دهید هر جواب معادله

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-ct}$$

که در آن a و c اعداد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی دلخواهی هستند، در بینهایت به صفر میل می کند.

تمرین ۲

(آ) ثابت کنید $\phi(t) = e^{ct}$ جواب معادله $y' - cy = 0$ است و به ازای هر مقدار ثابت c ، $y = c\phi(t)$ هم جواب این معادله است.

(ب) ثابت کنید به ازای $t > 0$ ، $\phi(t) = \frac{1}{t}$ جواب معادله $y' + y^2 = 0$ است. اما $y = c\phi(t)$ جواب این معادله نیست، مگر $c = 0$ یا $c = 1$.

(ج) با توجه به دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای در مورد تفاوت دو معادله می‌گیرید؟

تمرین ۳

مساله مقدار اولیه $y(0) = 1$ ، $y' + p(t)y = t$ را در نظر بگیرید که در آن

$$p(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \end{cases}$$

است. جواب این مساله مقدار اولیه را روی تمام اعداد حقیقی مثبت بیابید (دقت کنید چنین جوابی در تمام نقاط دارای مشتق پیوسته نیست).

تمرین ۴

با توجه به عامل انتگرال ساز $\mu = \frac{5}{xy^3}$ ، مقدار A را یافته و جواب معادله داده شده را به دست آورید.

$$(Axy - 2y^3)dx + (3xy - y^3)dy = 0$$

تمرین ۵

مقادیر α و β را بیابید به نحوی که $\mu = x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر باشد. سپس جواب معادله را به دست آورید.

$$y(4x + 3y^3)dx + x(2x + 5y^3)dy = 0$$

تمرین ۶

جواب معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش مناسب به دست آورید.

(آ)

$$\ln\left(\frac{y'}{x}\right) = y - x^2$$

(ب)

$$y' = y - xy^3 e^{-yx}$$

(ج)

$$y \ln(x) \ln(y) dx + dy = 0$$

(د)

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 + y^2} + xy + y^2$$

(ه)

$$y' = \frac{y}{y^4} \cos x + \frac{\sin^2 x}{y}$$

(و)

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 + y^2} + xy + y^2$$

(ز)

$$y' = \sin(x - y)$$