

سری دوازدهم تمرینات

تمرین ۱

تبدیل لاپلاس توابع داده شده را محاسبه کنید. سعی کنید در این محاسبه به جای استفاده مستقیم از تعریف، تا جای ممکن توابع را بصورت توابع شناخته شده در جدول لاپلاس تبدیل کنید و سپس تبدیل لاپلاس آن‌ها را محاسبه کنید.

(آ)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t^2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$f(t) = |\sin(t)|, \quad t \geq 0 \quad (\text{ب})$$

تمرین ۲

لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه کنید:

$$F(s) = \frac{(s-1)e^{-s}}{s^2 - 2s + 2} \quad (\text{آ})$$

$$F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3} \quad (\text{ب})$$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \quad (\text{ج})$$

تمرین ۳

(آ) فرض کنید $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ برای $0 < a < s$ ، موجود باشد. درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a} e^{-\frac{bt}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

سری دوازدهم تمرینات

ب) با استفاده از قسمت قبل لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه کنید:

$$F(s) = \frac{2s + 1}{4s^2 + 4s + 5}, \quad F(s) = \frac{e^2 e^{-4s}}{2s - 1}.$$

تمرین ۴

جواب مساله مقدار اولیه زیر را به صورت انتگرال پیچش به دست آورید:

$$y'' + 4y' + 4y = g(t), \quad y(0) = 2, y'(0) = -3$$

تمرین ۵

جواب مساله‌های مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$y'' + 2y' + 3y = \sin(t) + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{آ})$$

$$y'' + y = \delta(t - 2\pi) \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (\text{ب})$$