معادلات دیفرانسیل (پاییز ۱۴۰۰)

سری یازده تمرینات

تمرین ۱

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جز تبدیل لاپلاس تابع $t\sin at$ را به دست آورید.

تمرین ۲

ابتدا ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{t^{\frac{-۱}{۲}}\} = \frac{۲}{\sqrt{s}}\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}dx, \quad s > ۰$$

آنگاه با جایگذاری مقدار $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ عبارت به دست آمده را ساده کنید.

تمرین ۳

تبدیل معکوس تابع‌های زیر را به دست آورید.

آ) $F(s) = \frac{۴}{(s-۱)^{۳}}$

ب) $F(s) = \frac{۸s^{۲}-۴s+۱۲}{s(s^{۲}+۴)}$

ج) $F(s) = \frac{۲s-۳}{s^{۲}+۲s+۱۰}$

تمرین ۴

مسائل مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' + ۲y' + y = ۴e^{-t}, \quad y'(۰) = -۱, \quad y(۰) = ۲$$

$$y'' + ۴y' = \begin{cases} t^{۲} & ۰ \le t < ۱ \\ ۱ & ۱ \le t < \infty \end{cases} \quad y'(۰) = y(۰) = ۰$$

تمرین ۵

سری تیلور تابع $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq ۰ \\ ۱ & t = ۰ \end{cases}$ حول نقطه $t = ۰$ بیابید. سپس با فرض اینکه تبدیل لاپلاس این تابع را می‌توان جمله به جمله محاسبه کرد. تحقیق کنید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctan(\frac{۱}{s}), \quad s > ۱.$$

تمرین ۶

آ) نشان دهید اگر تبدیل لاپلاس $F(s) = \int_۰^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ در قضیه وجود تبدیل لاپلاس صدق کند آنگاه مشتق گیری از عبارت زیر انتگرال نسبت به پارامتر s به ازای هر $s > a$ مجاز می‌باشد.

ب) نشان دهید داریم:

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$$

ج) با استفاده از قسمت قبل تبدیل لاپلاس $t^n e^{at}$ را محاسبه کنید.