

## سری اول تمرینات

## تمرین ۱

میدان جهتی هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را رسم کنید، سپس رفتار جواب را هنگامی که  $t \rightarrow \infty$  میل می کند بررسی کنید و در آخر وابستگی جواب  $y$  را به مقدار اولیه در لحظه  $t = 0$  بررسی کنید.

$$y' = 1 - 2y$$

$$y' = y^2$$

$$y' = y(y + 2)$$

## تمرین ۲

مطلوبست تعیین مقادیر  $a$  و  $b$  در معادله دیفرانسیل  $y' = ay + b$  بطوریکه در  $t \rightarrow \infty$  داشته باشیم:

(آ) همه جوابها به  $y = -1$  میل کند

(ب)  $y = 3$  جواب معادله باشد و جوابهای دیگر به آن نزدیک شوند.

## تمرین ۳

یک داروی مشخص از طریق رگ به یک بیمار بیمارستانی تزریق می شود. مایع شامل  $5 \frac{mg}{cm^3}$  از دارو با نرخ  $100 \frac{cm^3}{h}$  وارد جریان خون بیمار می شود. بخشی از دارو جذب بافت های بدن می شود و مابقی آن جریان خون را متناسب با مقدار موجود با ثبات نرخی برابر  $0.4(h)^{-1}$  ترک می کند.

(آ) با فرض آنکه دارو همواره به طور یکنواخت در جریان خون توزیع می شود. یک معادله دیفرانسیل برای مقدار داروی حاضر در جریان خون در هر زمان بنویسید.

(ب) پس از مدت طولانی، مقدار داروی حاضر در جریان خون چقدر است؟

سری اول تمرینات

تمرین ۴

معادله دیفرانسیل  $y' = -ay + b$  را در نظر بگیرید که در آن  $a$  و  $b$  هر دو اعدادی مثبت هستند.

(آ) معادله دیفرانسیل را حل کنید.

(ب) جواب را به ازای چند شرط اولیه مختلف رسم کنید.

(ج) تشریح کنید اگر  $a$  یا  $b$  افزایش یابند جوابها چگونه تغییر می‌کند؟ هر دوی آنها افزایش یابند اما نسبت  $\frac{b}{a}$  ثابت بماند چطور؟

تمرین ۵

فرض کنید جمعیت موش‌های صحرائی در معادله دیفرانسیل  $\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$  صدق می‌کند که در آن  $p(t)$  جمعیت موش‌های صحرائی در زمان  $t$  می‌باشد.

(آ) اگر  $p(0) = 850$ ، زمانی را که جمعیت از بین می‌رود پیدا کنید.

(ب) اگر  $p(0) = p_0$  و  $0 < p_0 < 900$  زمان نابودی را پیدا کنید.

(ج) اگر جمعیت در عرض یک‌سال نابود شود، جمعیت اولیه  $p_0$  را پیدا کنید.

تمرین ۶

در تمرین قبل فرض کنید که جمعیت موش صحرائی با نرخ متناسب با جمعیت فصلیش تغییر می‌کند، یعنی  $\frac{dp}{dt} = rp$

(آ) اگر جمعیت در ۲۰ روز دوبرابر شود، نرخ ثابت  $r$  را بیابید.

(ب)  $r$  را طوری بیابید که جمعیت در  $N$  روز دوبرابر شود.

تمرین ۷

مقدار  $y_0$  را طوری بیابید که جواب مساهل مقدار اولیه

$$y' - y = 1 + 3 \sin t, \quad y(0) = y_0.$$

وقتی  $t \rightarrow \infty$  کراندار باقی بماند.

سری اول تمرینات

تمرین ۸

مساله مقدار اولیه

$$y' - \frac{3}{4}y = 3t + 2e^t, \quad y(0) = y_0.$$

را در نظر بگیرید. مقدار  $y$  را طوری بیابید که جوابهایی را که وقتی  $t \rightarrow \infty$  به طور مثبت رشد می کنند از آنها که به طور منفی رشد می کنند جدا کند. جواب متناظر مقدار بحرانی  $y$  وقتی  $t \rightarrow \infty$  چگونه رفتار می کند؟

تمرین ۹

مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

(ا)  $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 y)$

(ب)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

(ج)  $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 2x}{x - y}$

(د)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}$