به نام آفریدگار یکتا

سری نهم تمرین‌ها

درس ریاضی‌عمومی ۲

آذرماه ۱۴۰۰

پرسش ۱ تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را بدین صورت تعریف کنید: اگر $(x,y)\neq(0,0)$ تعریف کنید $f(x,y)=\dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ و در مبدا نیز تعریف کنید $f(0,0)=0$. مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ در نقطه $(x,y)=(0,0)$

پرسش ۲ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u=x^2+y^2 \\ \\ v=x^2-2xy^2 \end{cases}$$

فرض کنید $P=(x,y,u,v)=(1,2,5,-7)$. همچنین فرض کنید حول نقطه P، توسط دستگاه بالا متغیرهای x,y برحسب توابعی از متغیرهای u,v بیان شوند. تمامی مشتق های دوم x,y را برحسب متغیرهای u,v در نقطه $(u,v)=(5,-7)$ بیابید.

پیشنهاد: ابتدا با استفاده از قضیه تابع وارون می توانید تمامی مشتق های اول x,y را برحسب متغیرهای u,v در نقطه $(u,v)=(5,-7)$ بدست آورید. حال از طرفین هر دو معادله در دستگاه فوق دو بار مشتق گرفته و با جایگذاری مقدار $(u,v)=(5,-7)$ به دستگاه یا دستگاه هایی از معادلات خطی می رسید که با حل آنها تمامی مشتقات مرتبه دوم x,y نسبت به u,v در نقطه $(u,v)=(5,-7)$ حاصل می شود.

پرسش ۳ فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که مشتقات مرتبه دوم آن همه جا وجود داشته و بعلاوه همه جا پیوسته باشند. فرض کنید f در رابطه $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ به ازای عدد ثابت $k>2$ ای و برای تمامی مقادیر $t,x,y\in\mathbb{R}$ صدق کند.

نشان دهید:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=k(k-1)f(x,y)$$

پرسش ۴ فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و تمامی مشتقات جزئی مرتبه دوم آن همه جا موجود و پیوسته باشد. لاپلاسین f بدین صورت تعریف می شود:

$$\nabla^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

اکنون فرض کنید $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$. به عبارتی مولفه های x,y را به فرم قطبی خود نمایش داده ایم. نشان

دهید در مختصات قطبی، لاپلاسین به شکل زیر بیان می شود:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

پرسش ۵ برای تابع $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ که مشتق پذیر با مشتقات جزئی مرتبه ۲ پیوسته است، لاپلاسین همانند صورت پرسش قبل تعریف می شود. اکنون فرض کنید در مختصات کروی صحبت می کنیم. یعنی $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$ و $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$ و $z = \rho\cos\varphi$. فرمولی برای $\nabla^2 f$ در مختصات کروی بدست بیاورید.

پرسش ۶ تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را همساز می نامیم هرگاه $\nabla^2 f = 0$ روی $\mathbb{R}^2$. فرض کنید $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ توابعی مشتق پذیر با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند به قسمی که تساوی های $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ روی $\mathbb{R}^2$ برقرار هستند. به علاوه فرض کنید f نیز تابعی همساز باشد. نشان دهید تابع $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ نیز تابعی همساز است.

توجه کنید که در مسئله های فوق، فرض پیوسته بودن مشتقات جزئی مرتبه دوم توابع بیشتر به این منظور درج شده که تعویض اولویت مشتق گیری جزئی مرتبه دوم مجاز باشد. به عبارت دیگر، اگر تابع $f(x,y)$ در شرایط فرض مذکور صدق کند آنگاه $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. در سوال دوم نیز مجاز هستید که مشتق گیری نسبت به u, v را با یکدیگر تعویض کنید. یعنی $\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$