سری هفتم تمرین‌ها

درس ریاضی‌عمومی ۲

آبان‌ماه ۱۴۰۰

به نام آفریدگار یکتا

پرسش ۱ تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ را با ضابطه $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}xy+z\\-x^2+y^2+z^2\end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

- برای نقطه $P\in\mathbb{R}^3$ تبدیل خطی D_Pf را بیابید.
- نقاط P را به قسمی بیابید که $D_Pf:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ دارای تصویر ۲ - بعدی باشد. همچنین نقاط P را به قسمی بیابید که تصویر نگاشت مذکور یک بعدی باشد.

پرسش ۲ تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ را با ضابطه $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x^2+y+2z^2\\xz+y^2\\x^2+2y\\x+2z^2\end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. برای نقطه $P\in\mathbb{R}^3$ تبدیل خطی $D_Pf:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ را بیابید. فضای پوچ D_Pf را به ازای دو انتخاب دلخواه P بیابید.

پرسش ۳ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ نگاشتی هموار باشد. یعنی مشتقات f از هر مرتبه وجود داشته باشد. نگاشت $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را بدین صورت تعریف کنید : اگر $x\neq y$ آنگاه $h(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ و اگر $x=y$ آنگاه $h(x,x)=f'(x)$. نشان دهید f تابعی مشتق پذیر است.

پیشنهاد: برای نقاط (x,y) که $x\neq y$ می توانید مشتق پذیری را با کمک از مشتقات جزئی f نشان دهید. اگر $x=y$ آنگاه با استفاده از تعریف مشتق پذیری و استفاده از قضیه تیلور برای توابع یک متغیره می توانید مشتق پذیری را نشان دهید. فراموش نکنید که مشتق پذیری خاصیتی موضعی برای توابع است.

پرسش ۴ تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ به گونه ای است که برای هر $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$ و برای هر $t\in\mathbb{R}$ و برای عدد طبیعی ثابت m در رابطه $f(t\mathrm{x})=t^mf(\mathrm{x})$ صدق می کند. فرض کنید $\mathrm{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. همچنین فرض کنید f روی $\mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشد. نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x})=mf(\mathrm{x})$$

پرسش ۵ نگاشت $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=x^3+x^2y+y^2z+\sin\pi(z+y)$ در نظر بگیرید. فضای مماس بر

نمودار نگاشت f را در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ مشخص کنید.

پرسش ۶ نگاشت $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ را با ضابطه $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin(\pi x_1 x_3) + x_2 + x_4^3 \\ x_1 + 2x_2^2 + 3x_4^3 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. قرار دهید $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
تصویر نگاشت $D_P f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ چند بعدی است؟ در مورد مجموعه تراز نگاشت f متناظر با $f(P)$ چه می توان گفت؟

فضای مماس این مجموعه تراز در نقطه P را چطور می توان توصیف کرد؟