به نام آفریدگار یکتا

سری ششم تمرین‌ها

درس ریاضی‌عمومی ۲

آبان‌ماه ۱۴۰۰

پرسش ۱ یک پرمایش برای خم C در $\mathbb{R}^3$ که روی فصل مشترک استوانه $y^2+z^2=z$ و صفحه $x+y=z$ قرار دارد بیابید.

پرسش ۲ ماتریس پادمتقارن $n\times n$ ای مانند A مفروض است (یعنی $A^{\mathrm{T}}=-A$). فرض کنید $\gamma(t)$ خمی هموار در $\mathbb{R}^n$ باشد بطوریکه برای هر $t\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $\boxed{\gamma'(t)=A\gamma(t)}$. نشان دهید تصویر γ روی کره‌ای به مرکز مبدا در $\mathbb{R}^n$ واقع است.

پرسش ۳ فرض کنید $a,b>0$. خم $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ را برحسب پارامتر t بصورت زیر تعریف کنید:

$$\boxed{\gamma(t)=(e^{at},e^{at}\cos bt,e^{at}\sin bt)}$$

نشان دهید تصویر γ روی مخروطی (که محور آن همان محور x ها است) قرار دارد. سپس طول γ را از نقطه شروع $t=t_1$ تا نقطه پایان $t=t_2$ محاسبه کنید. همچنین γ را بر حسب پرمایش طول کمان بازنویسی کنید.

پرسش ۴ می دانیم فصل مشترک یک صفحه و یک کره به مرکز مبدا در $\mathbb{R}^3$ در صورت وجود یک دایره در $\mathbb{R}^3$ است. مرکز و شعاع دایره‌ای که روی فصل مشترک صفحه $x+y+z=1$ و کره $x^2+y^2+z^2=1$ در $\mathbb{R}^3$ قرار دارد را بیابید.

پیشنهاد: پیشنهاد می‌شود فرآیند زیر را طی کنید:

- با استفاده از یک پرمایش فرضی $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ (منظور آن است که واقعا لازم نیست γ را بطور صریح محاسبه کنید) برای خم مذکور که در رابطه $\gamma(0)=(1,0,0)$ صدق می کند یک بردار مماس یکه برای این خم در نقطه $A=(1,0,0)$ بیابید (در واقع دو عدد از این بردارها یافت می‌شوند که ناشی از نحوه جهت دهی خم مذکور است ولی یافتن یکی از این بردارها برای پیشبرد هدف کافی است). این بردار را T می‌نامیم
- قرار دهید $N=T\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ و خط L گذرا از نقطه A با بردار هادی N را بیابید. این خط کره واحد را علاوه بر نقطه A در نقطه‌ای دیگر قطع خواهد کرد. با بدست آوردن این نقطه به راحتی مرکز و شعاع دایره مد نظر حاصل می‌شود.

پرسش ۵ توصیفی از خم C واقع بر فصل مشترک کره $x^2+y^2+z^2=1$ و استوانه $x^2+2z^2=1$ ارائه داده و نشان دهید C یک خم بسته است. طول این خم را بدست آورید.

پرسش ۶ فرض کنید $r(t)$ بردار مکان ذره ای در $\mathbb{R}^3$ در فضای **۳-** بعدی در لحظه t با بردار سرعت $v(t)$ و بردار شتاب $a(t)$ باشد.

فرض کنید در هر لحظه t بردار شتاب ذره بر هر دوی بردارهای مکان و سرعت ذره عمود باشد. نشان دهید بردار:

$$r(t) - tv(t)$$

دارای طولی ثابت است.