



پرسش ۱ نشان دهید بردارهای زیر در  $\mathbb{R}^3$  مستقل خطی هستند. سپس توضیح دهید که چرا بردارهای زیر پایه‌ای برای فضای  $\mathbb{R}^3$  پدید می‌آورند.

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پرسش ۲ آیا بردارهای زیر در  $\mathbb{R}^4$  مستقل خطی هستند؟

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

پرسش ۳ نشان دهید بردارهای زیر در  $\mathbb{R}^5$  مستقل خطی هستند و سپس مجموعه این بردارها را به یک پایه از  $\mathbb{R}^5$  گسترش دهید.

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پرسش ۴ فرض کنید  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تبدیلی خطی باشد که توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  داده شده است. پایه‌ای برای فضای پوچ  $T$  بیابید. برد  $T$  چند بعدی است؟ (بدون آنکه فضای برد  $T$  را بدست آورید می‌توانید به کمک فضای پوچ  $T$  بعد فضای برد  $T$  را بدست آورید).

پرسش ۵ پرسش ۴ را برای تبدیل خطی  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  که توسط ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

داده شده است بررسی کنید.

پرسش ۶

فرض کنید  $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تبدیلی خطی باشد که توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$  داده شده است. بعد فضای پوچ و بعد برد تبدیل  $T$  را محاسبه کنید.

پرسش ۷

• (الف) حجم استاندارد سه بعدی متوازی السطوحی که در  $\mathbb{R}^3$  توسط سه بردار زیر تولید می شود را بدست آورید:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

• فرض کنید تبدیلی خطی  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  داده شده باشد. توضیح دهید که چگونه صرفاً با استفاده از اطلاعات قسمت (الف) و بدون بدست آوردن بردارهای  $Tv_1, Tv_2, Tv_3$  می توان حجم استاندارد سه بعدی متوازی السطوحی که توسط بردارهای  $Tv_1, Tv_2, Tv_3$  تولید می شود را بدست آورد.

پرسش ۸

فرض کنید  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  یک تبدیلی خطی باشد که توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$  داده شده باشد. مقادیر ویژه تبدیل  $T$  را بیابید. همچنین پایه ای از  $\mathbb{R}^2$  متشکل از بردارهای ویژه تبدیل  $T$  بیابید.

پرسش ۹

فرض کنید  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  یک تبدیلی خطی باشد که توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$  داده شده باشد. مقادیر ویژه تبدیل  $T$  را بیابید. همچنین پایه ای از  $\mathbb{R}^3$  متشکل از بردارهای ویژه تبدیل  $T$  بیابید.

پرسش ۱۰

فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  و فرض کنید  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تبدیلی خطی داده شده توسط ماتریس  $A$  باشد. یک پایه متعامد یکه (نسبت به ضرب داخلی استاندارد روی  $\mathbb{R}^3$ ) برای  $\mathbb{R}^3$  متشکل از بردارهای ویژه تبدیل  $T$  بیابید (از آنجایی از  $A$  متقارن است چنین پایه ای حتماً وجود دارد).

توجه کنید که در سوالات ۸ و ۹ و ۱۰ تأکیدی به بیان روش پیدا نمودن بردارهای ویژه نشده است.