سری سیزدهم تمرین‌ها

درس ریاضی‌عمومی ۲

دی‌ماه ۱۴۰۰

به نام آفریدگار یکتا

پرسش ۱ با استفاده از قضیه گرین، حاصل انتگرال $\oint_C (\sin x + ۳y^۲)dx + (۲x - e^{-y^۲})dy$ را محاسبه کنید که در آن C مرز نیم دایره $x^۲ + y^۲ \leq a^۲$ و $y \geq ۰$ است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

پرسش ۲ فرض کنید C مثلثی با رئوس $(۰, ۰)$ و $(۱, ۱)$ و $(۲, ۰)$ در جهت ساعتگرد باشد. حاصل انتگرال زیر را با استفاده از قضیه گرین بدست آورید.

$$\oint_C (x^۲ - xy)dx + (xy - y^۲)dy$$

پرسش ۳ با استفاده از قضیه گرین، حاصل انتگرال $\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ را بدست آورید که در آن، $\mathbf{F} = ye^{x^۲}\mathbf{i} + x^۳e^y\mathbf{j}$ و $\mathbf{r} = \sin t\mathbf{i} + \sin ۲t\mathbf{j}$ و $۰ \leq t \leq ۲\pi$

پیشنهاد ابتدا توصیه می‌شود که با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، معادله دکارتی خمی را بیابید که توسط $\mathbf{r}$ پرمایش شده است.

پرسش ۴ فرض کنید $\mathbf{F} = ۳xz^۲\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ و S قسمتی از استوانه به معادله $y^۲ + z^۲ = ۱$ باشد که در یک- هشتم فضای سه بعدی بین صفحات $x = ۰$ و $x = ۱$ قرار دارد. حاصل انتگرال $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{N}dS$ را بدست آورید.

پیشنهاد به منظور استفاده از قضیه دیورژانس، ابتدا مشاهده می‌شود که S یک رویه بسته نیست. پیشنهاد می‌شود که شکل S را رسم کرده و با رسم شکل، رویه‌هایی که نیاز است که به S ملحق شوند تا در نهایت یک رویه بسته ایجاد گردد مشخص می‌گردند. آنها را به S الحاق نموده و ازقضیه دیورژانس استفاده کنید.

پرسش ۵ فرض کنید C کره به مرکز مبدا و شعاع a باشد. با استفاده از قضیه دیورژانس، حاصل هریک از انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

- $\oiint_C (ye^z\mathbf{i} + x^۲e^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}).\mathbf{N}dS$
- $\oiint_C \Big((x^۲ + y^۲)\mathbf{i} + (y^۲ - z^۲)\mathbf{j} + z\mathbf{k}\Big).\mathbf{N}dS$

پرسش ۶ حاصل $\oiint_{\mathcal{T}} (x^۲\mathbf{i} + y^۲\mathbf{j} + z^۲\mathbf{k}).\mathbf{N}dS$ را بدست آورید که در آن $\mathcal{T}$ تتراهدرون $x + y + z \leq ۳$ و $x, y, z \geq ۰$ است.

پرسش ۷ فرض کنید $\mathcal{D}$ ناحیه ای است که توسط روابط $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ و $x^2 + y^2 \geq a^2$ مشخص می‌شود. اگر مرز $\mathcal{D}$ را S بنامیم، آنگاه S از یک ناحیه کروی و یک ناحیه استوانه ای تشکیل شده است. شار برونسوی میدان:

$$\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (y - xz)\mathbf{j} + (z - e^x \sin y)\mathbf{k}$$

را روی S بدست آورید.

پرسش ۸ حاصل انتگرال $\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ را بدست آورید که در آن $\mathbf{F} = ye^x\mathbf{i} + (x^2 + e^x)\mathbf{j} + z^2e^z\mathbf{k}$ و C خم:

$$\mathbf{r} = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (1 + \sin t)\mathbf{j} + (1 - \cos t - \sin t)\mathbf{k} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

است.

پیشنهاد توجه کنید که C فصل مشترک صفحه $x + y + z = 3$ و استوانه $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ است. همچنین، بسته به جهت $\mathbf{r}$ با استفاده از قاعده دست راست می‌توان جهت بردار $\mathbf{N}$ را تشخیص داد.

پرسش ۹ حاصل $\oint_C ydx - xdy + z^2dz$ را بدست آورید که در آن C فصل مشترک دو استوانه (با سطح مقطع‌های سهمی و دایره شکل) به معادلات $z = y^2$ و $x^2 + y^2 = 4$ و با جهت دلخواه است.

پرسش ۱۰ چندوجهی $\mathcal{P}$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. وجوه آن را با $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ نام گذاری کنید. فرض کنید N_i بردار نرمال برونسویی روی وجه $\mathcal{F}_i$ باشد که اندازه آن برابر با مساحت وجه $\mathcal{F}_i$ باشد. نشان دهید:

$$\sum_i \mathrm{N}_i = 0$$

پیشنهاد قرار دهید $B = \sum_i \mathrm{N}_i$. فرض کنید e_1, e_2, e_3 بردارهای یکه واحد استاندارد باشند. قضیه دیورژانس را سه بار روی $\mathcal{P}$ و برای میدان‌های e_1, e_2, e_3 بکار ببرید تا نشان دهید $B.e_1 = B.e_2 = B.e_3 = 0$. بنابراین به نتیجه مطلوب دست می‌یابیم.

پرسش ۱۱ شار برونسوی میدان $\mathbf{F} = (4x + 2x^3z)\mathbf{i} - y(x^2 + z^2)\mathbf{j} - (3x^2z^2 + 4y^2z)\mathbf{k}$ را روی بیضی گون به معادله $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ بدست آورید.

پرسش ۱۲ برای میدان $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + (3z - xy^2)\mathbf{j} + (4y - x^2y)\mathbf{k}$ و خم C که فصل مشترک صفحه $x + y + z = 1$ و استوانه $x^2 + y^2 = 1$ است (با جهت دلخواه)، حاصل $\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ را بیابید.