



پرسش ۱

هریک از انتگرالهای زیر را روی خم داده شده محاسبه کنید.

$$\bullet \int_C e^z ds \quad \text{که در آن } C \text{ خم } r(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \text{ است که } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\bullet \int_C \frac{ds}{(2y^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{که در آن } C \text{ خمی است که روی فصل مشترک مخروط } z^2 = x^2 + y^2 \text{ و صفحه } x + z = 1 \text{ قرار دارد.}$$

پرسش ۲

فرض کنید C کل خط $x + y = 1$ باشد. نشان دهید با استفاده از مختصات قطبی، می‌توان C را بصورت زیر پرمایش نمود:

$$r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\right)$$

با استفاده از پرمایش فوق، حاصل انتگرال $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2}$ را بیابید.

پرسش ۳

فرض کنید S رویه پرمایشی با پرمایش زیر باشد:

$$\mathbf{r}(u, v) = e^u \cos v \mathbf{i} + e^u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad 0 \leq v \leq \pi$$

حاصل انتگرال $\iint_S \sqrt{1 + e^{2u}} dS$ را بیابید.

پرسش ۴

مساحت قسمتی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را بیابید که درون استوانه $z = 2ay$ قرار دارد.

پرسش ۵

مساحت رویه پرمایشی زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{r}(u, v) = au \cos v \mathbf{i} + au \sin v \mathbf{j} + bv \mathbf{k} \quad 0 \leq u \leq u \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

پرسش ۶

کار هرکدام از میدان‌های (نیرو) زیر را بر روی مسیرهای داده شده بدست آورید.

$$\bullet \text{ نیروی } F(x, y) = \cos x \mathbf{i} - y \mathbf{j} \text{ روی خم } y = \sin x \text{ از نقطه شروع } (0, 0) \text{ تا نقطه پایان } (\pi, 0)$$

$$\bullet \text{ نیروی } F(x, y, z) = (x - z) \mathbf{i} + (y - z) \mathbf{j} - (x + y) \mathbf{k} \text{ روی مسیری قطعه به قطعه خطی که ابتدا از نقطه}$$

$$(0, 0, 0) \text{ طی مسیری خطی به نقطه } (1, 0, 0) \text{ رفته و سپس مجدداً از این نقطه طی مسیری خطی به نقطه } (1, 1, 0) \text{ رفته}$$

و در انتها طی مسیری خطی به نقطه پایانی $(1, 1, 1)$ می‌رسیم.

- نیروی $F(x, y) = x^2y^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$ روی مسیر (بسته) مربعی با رئوس $(0, 0)$ و $(0, 1)$ و $(1, 0)$ و $(1, 1)$ جهت دهی شده در خلاف جهت عقربه های ساعت

- نیروی $F(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ روی خم فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = y$ با شروع از نقطه $(-1, 0, 0)$ و نقطه پایانی $(1, 0, 0)$

پرسش ۷

مقادیر حقیقی A, B را به قسمی بیابید که میدان زیر یک میدان گرادیان باشد.

$$F(x, y, z) = Ax \ln z \mathbf{i} + By^2 z \mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^2 \right) \mathbf{k}$$

سپس یک تابع پتانسیل برای میدان فوق بدست آورید.

پرسش ۸

میدان $F(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ را در نظر بگیرید.

- نشان دهید F در شرایط نیروی گرادیان صدق می کند. یعنی مشتق مولفه \mathbf{i} نسبت به y برابر است با مشتق مولفه \mathbf{j} نسبت به x .

- فرض کنید C دایره $x^2 + y^2 = a^2$ باشد که بطور دلخواه جهت دهی شده است. مقدار $\oint_C F \cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید و نشان دهید ناصفر است.

بنابراین اگرچه که نیروی F در شرط گرادیان روی $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ صدق می کند اما F میدانی پایستار (مستقل از مسیر) روی $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ نیست چرا که اگر این میدان مستقل از مسیر باشد، آنگاه حاصل انتگرال فوق باید برابر با صفر باشد در صورتی که چنین نیست. بنابراین پایستگی یک نیرو علاوه بر شرط گرادیان، وایستگی شدیدی به بعضی خواص ذاتی فضا نیز دارد.

پرسش ۹

شار برونسوی میدان $F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بر رویه پرمایشی:

$$\mathbf{r}(u, v) = u^2v\mathbf{i} + uv^2\mathbf{j} + v^3\mathbf{k} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad 0 \leq v \leq 1$$

را بدست آورید.

پرسش ۱۰

شار برونسوی میدان $F = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ را بر سطح مکعب $-a \leq x, y, z \leq a$ بدست آورید ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$)