سری اول تمرین‌ها

درس ریاضی‌عمومی ۲

مهرماه ۱۴۰۰

به نام آفریدگار یکتا

پرسش ۱ در هریک از قسمت های زیر زوج بردارهای $\vec{u},\vec{v}$ در فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ داده شده اند. بردارهای $\vec{u}\pm\vec{v}$ و $2\vec{u}-3\vec{v}$ را بدست آورید. همچنین مقادیر $|\vec{u}|,|\vec{v}|$ را نیز بدست آورید.

- بردارهای $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=-3\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$ در فضای $\mathbb{R}^2$
- بردارهای $\vec{u}=(4,1)$ و $\vec{v}=(0,7)$ در فضای $\mathbb{R}^2$
- بردارهای $\vec{u}=(1,1,1)$ و $\vec{v}=(0,1,-2)$ در فضای $\mathbb{R}^3$
- بردارهای $\vec{u}=\frac{1}{3}(\vec{i}-2\vec{j})$ و $\vec{v}=\vec{k}-2\vec{i}$ در فضای $\mathbb{R}^3$

پرسش ۲ دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ روی فضای دو بعدی $\mathbb{R}^2$ داد شده اند. برداری بیابید که زاویه بین $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را نصف کند.

پرسش ۳ موارد خواسته شده را محاسبه کنید.

- $\vec{u}.\vec{v}$ که در آن $\vec{u}=(\frac{1}{3},\frac{2}{5})$ و $\vec{v}=(2,3)$ بردارهایی در $\mathbb{R}^2$ هستند.
- $\vec{u}.\vec{v}$ و زاویه بین دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ که در آن $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ و $\vec{v}=(-2,2)$ بردارهایی در $\mathbb{R}^2$ هستند.
- $\vec{u}\times\vec{v}$ که در آن $\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{j}+5\vec{k}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ هستند.
- $\vec{u}\times\vec{v}$ و جهت بردار ذکر شده که در آن $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ هستند. سعی کنید جهت بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ را با ترسیم شکل و با استفاده از قاعده دست راست بیابید.

پرسش ۴ در هریک از موارد زیر یک بردار ناصفر $\vec{u}$ در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ داده شده است. بردارهای $\vec{v},\vec{w}$ را طوری پیدا کنید که بردارهای $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ دو به دو برهم عمود باشند. توجه کنید که لزومی ندارد بردارهای $\vec{v},\vec{w}$ بصورت یکتا برحسب بردار $\vec{u}$ حاصل شوند.

- بردار $\vec{u}=\frac{4}{3}\vec{i}-\vec{j}$
- بردار $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$

پرسش ۵ برداری با طول واحد در $\mathbb{R}^3$ بیابید که با جهت های مثبت محورهای مختصات زوایای یکسان بسازد.

پرسش ۶ درستی هریک از روابط زیر را برای بردارهای $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ بررسی کنید.

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}.(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}.(\vec{u}\times\vec{v}) \qquad (۱)$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w} \qquad (۲)$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) + \vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}) + \vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{o} \qquad (۳)$$

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{o} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u} \qquad (۴)$$

پرسش ۷

- نشان دهید نقاط $A_۱=(۲,۳,۴)$ و $A_۲=(-۱,-۲,۱)$ و $A_۳=(۵,۸,۷)$ هم خط هستند.
- نشان دهید خط $L_۱$ گذرا از نقاط $P_۱=(۱,-۱,۲)$ و $P_۲=(۳,۴,-۲)$ بر خط $L_۲$ گذرا از نقاط $Q_۱=(۰,۳,۲)$ و $Q_۲=(۳,۵,۶)$ عمود است.
- نشان‌دهیدخط $L_۱$ گذرا از نقاط $P_۱=(۴,۷,۸)$ و $P_۲=(۲,۳,۴)$ موازی خط $L_۲$ گذرا از نقاط $Q_۱=(-۱,-۲,۱)$ و $Q_۲=(۱,۲,۵)$ است. کوتاهترین فاصله میان خطوط $L_۱$ و $L_۲$ را بیابید.

پرسش ۸ نشان دهید زوج خطوط داده شده نسبت به یکدیگر متنافر هستند. سپس روشی را بیان کنید که با استفاده از آن بتوان کوتاهترین فاصله میان دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را پیدا نمود (نیازی به محاسبه فاصله نیست).

- خطوط $L_۱$ و $L_۲$ که به فرم برداری تحت ضوابط زیر داده شده‌اند:

$$L_۱ : \vec{r}_۱(t) = (۱-t)\vec{i} + (t-۲)\vec{j} + (۳-۲t)\vec{k}$$

$$L_۲ : \vec{r}_۲(s) = (s+۱)\vec{i} + (۲s-۱)\vec{j} - (۲s+۱)\vec{k}$$

- خطوط $L_۱$ و $L_۲$ که به فرم دکارتی تحت ضوابط زیر داده شده‌اند:

$$L_۱ : \frac{x+۱}{۷} = \frac{-y-۱}{۶} = z+۱$$

$$L_۲ : x-۳ = \frac{-y+۵}{۲} = z-۷$$

پرسش ۹ زاویه میان هرکدام از زوج خطوط زیر را بیابید.

- خطوط L_1 و L_2 که به فرم برداری تحت ضوابط زیر داده شده‌اند:

$$L_1 : \vec{r}_1(t) = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} + t(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$L_2 : \vec{r}_2(s) = 7\vec{i} - 6\vec{k} + s(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

- خطوط L_1 و L_2 که به فرم دکارتی تحت روابط زیر داده شده‌اند:

$$L_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{-z-3}{3}$$

$$L_2 : -x-2 = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$$

پرسش ۱۰ فرم برداری و فرم دکارتی معادله خطی که بر فصل مشترک دو صفحه زیر قرار دارد را بیابید.

$$P_1 : 3x + 5y - z = 1$$

$$P_2 : 2x - y + z = -3$$

پرسش ۱۱ دو خط L_1 و L_2 به فرم برداری توسط روابط زیر داده شده‌اند:

$$L_1 : \vec{r}_1(t) = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$L_2 : \vec{r}_2(s) = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k} + s(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$$

آیا صفحه‌ای مانند P موجود است که خطوط L_1 و L_2 را تماما در برداشته باشد؟ در صورت وجود چنین صفحه‌ای معادله آن را بیابید.

پرسش ۱۲ صفحه $P : x + y + z = 1$ را در نظر بگیرید. دو خط L_1 و L_2 را طوری بیابید که تماما روی صفحه P قرار داشته باشند و بر یکدیگر عمود باشند (توجه کنید که خطوط L_1 و L_2 بطور یکتا حاصل نمی‌شوند و بینهایت انتخاب برای خطوط L_1 و L_2 وجود دارد).

همچنین برای زاویه α داده شده زوجی از خطوط روی P را چنان بیابید که با یکدیگر زاویه α بسازند.

پرسش ۱۳ صفحه P را چنان بیابید که بر صفحه $P_1 : x - y + z = 0$ عمود باشد و خطی که روی فصل مشترک دو صفحه P_2 و P_3 واقع است را تماما در برداشته باشد:

$$P_2 : x + y + z = 1$$

$$P_3 : 2x + 3y + 4z = 5$$

پرسش ۱۴ در هریک از حالات زیر وضعیت میان زوج صفحات داده شده را بررسی کنید (آیا زوج صفحات داده شده موازی اند یا متقاطع). در صورتی که دو صفحه داده شده متقاطع باشند زاویه بین آن دو را بیابید.

- صفحات:

$$P_1 : 7x + 5y + 6z + 30 = 0$$

$$P_2 : 3x - y - 10z + 4 = 0$$

- صفحات:

$$P_1 : 2x + y + 3z - 2 = 0$$

$$P_2 : x - 2y + 5 = 0$$

- صفحات:

$$P_1 : 2x - 2y + 4z + 5 = 0$$

$$P_2 : 3x - 3y + 6z - 1 = 0$$