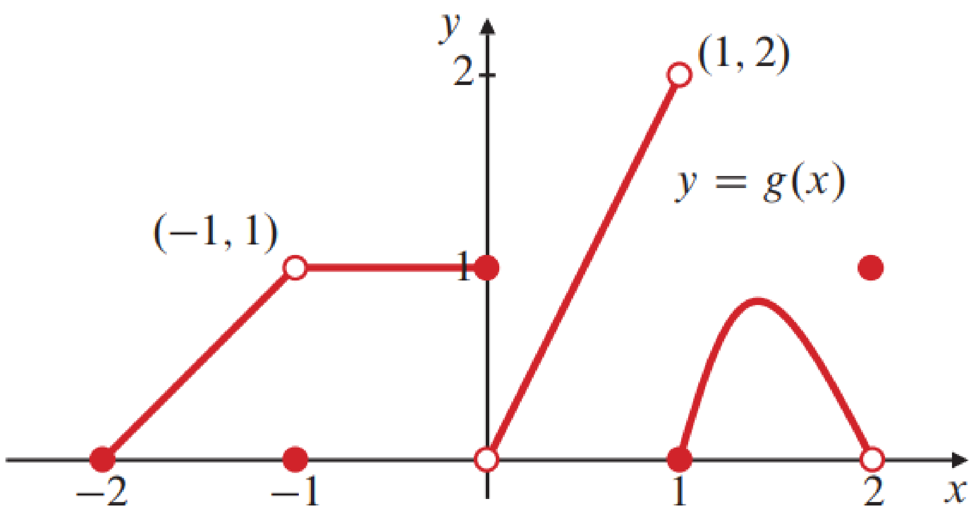
با یاد او

سری سوم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (مبحث پیوستگی)

مسئله ۱. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$، آیا لازم است که نقطهٔ a متعلق به دامنهٔ تابع باشد؟ با تغییر کلمهٔ «پیوستگی» به «حد»، مسئله را بار دیگر بررسی کنید.

مسئله ۲. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد. با استفاده از خواص توابع پیوسته و یا هر روش دیگر، نشان دهید $p(x)$ در تمام نقاط پیوسته است.

مسئله ۳. تمرینات ۱ تا ۳ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $g(x)$ تابعی با دامنهٔ $[-۲,۲]$ و نمودار زیر باشد.

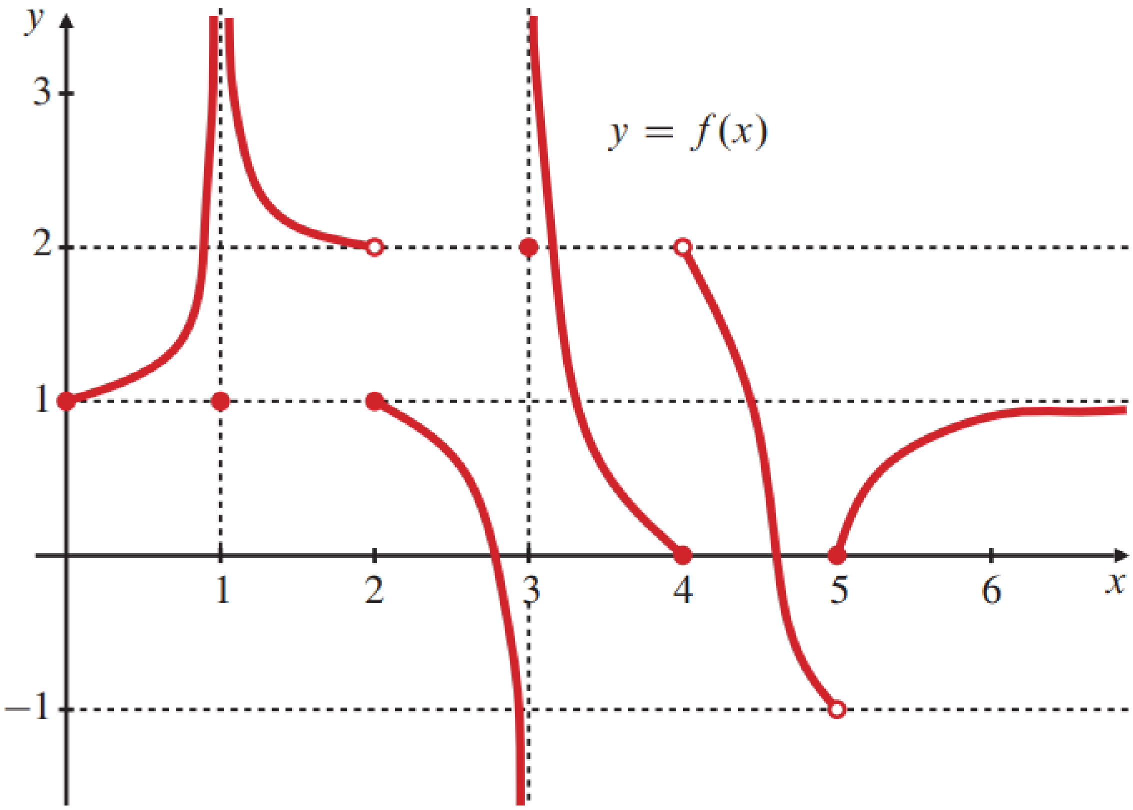


آ) پیوستگی، پیوستگی چپ، پیوستگی راست، و ناپیوستگی تابع $g(x)$ را در نقاط ۲−، ۱−، ۰، ۱، و ۲ بررسی کنید.

ب) در چه نقاطی از دامنهٔ $[-۲,۲]$، تابع $g(x)$ دارای ناپیوستگی رفع شدنی است؟ چگونه می‌توان تابع $g(x)$ را در این نقاط بازتعریف کرد تا در این نقاط پیوسته گردد.

ج) آیا تابع $g(x)$ ماکسیمم مطلق در بازهٔ $[-۲,۲]$ دارد؟ مینیمم مطلق چطور؟

مسئله ۴. تمرینات ۴ و ۵ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ و نمودار زیر باشد.



آ) پیوستگی، پیوستگی چپ، پیوستگی راست، و ناپیوستگی تابع $f(x)$ را در نقاط دامنهٔ آن بررسی کنید.

ب) آیا می‌توان تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۱$ طوری بازتعریف کرد تا $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته گردد؟

مسئله ۵. مشابه تمرین ۶ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: نشان دهید تابع علامت $\operatorname{sgn}(x)$ با ضابطهٔ

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

در دامنهٔ تعریف خود، یعنی $\mathbb{R} \setminus \{۰\} = (-\infty, ۰) \cup (۰, +\infty)$، پیوسته است. آیا تابع $F_c(x)$ با ضابطهٔ

$$F_c(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & x \neq ۰ \\ c & x = ۰ \end{cases}$$

برای یک c مناسب می‌تواند روی $\mathbb{R}$ پیوسته گردد؟

مسئله ۶. نشان دهید تابع

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \sqrt{2}x}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

فقط در صورتی در مبدأ پیوسته است که $c = \sqrt{2}$ باشد.

مسئله ۷. تمرینات ۷ تا ۱۰ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: مشخص کنید که هر کدام از توابع زیر در چه نقاطی (از دامنهٔ خود) از راست پیوسته، در چه نقاطی از چپ پیوسته و در چه نقاطی پیوسته هستند.

آ) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$.

ب) $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$.

ج) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

د) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 0/987 & x > 1 \end{cases}$.

مسئله ۸. دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt[4]{5 - x^2}$ را مشخص کنید و نشان دهید این تابع در نقاط ابتدا و انتهای دامنهٔ خود به‌ترتیب از راست و چپ پیوسته است.

مسئله ۹. تمرین ۱۷ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: عدد k را طوری بیابید تا تابع $f(x)$ با ضابطهٔ زیر پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ k - x^2 & x > 2. \end{cases}$$

مسئله ۱۰. درستی و یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

آ) تابع $f(x) = x^2$ روی بازهٔ $(-2, 2)$ ماکسیمم دارد ولی ماکسیمم مطلق ندارد.

ب) تابع $f(x) = x^3$ روی بازهٔ $(-2, 2)$ نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم.

ج) تابع $f(x) = x^3$ روی بازهٔ $(-2, 2]$ ماکسیمم دارد ولی مینیمم ندارد.

د) تابع $f(x)=x^4$ روی بازهٔ $(-1,1)$ ماکسیمم ندارد ولی مینیمم (مطلق) دارد.

ه) تابعی وجود دارد که در (برخی از نقاط) بازهٔ $[-1,1]$ ناپیوسته باشد ولی ماکسیمم و مینیمم مطلق داشته باشد.

و) هر تابع پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$ هم ماکسیمم (مطلق) و هم مینیمم (مطلق) دارد.

ز) هر تابع پیوسته روی بازهٔ $\mathbb{R}$ هم ماکسیمم (مطلق) و هم مینیمم (مطلق) دارد.

ح) تابعی با دامنهٔ $[-1,1]$ وجود دارد که پیوسته و بیکران باشد.

ط) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و $A\subset\mathbb{R}$ کراندار باشد. $f(A)$ نیز کراندار است.

ی) تابع پیوسته و پوشا از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ وجود ندارد که حداقل یک مقدار از بردش را دقیقاً دوبار اختیار کند.

ک) اگر f در نقطهٔ a پیوسته باشد، $\sqrt[n]{|f|^m}$ ، برای هر n و m طبیعی، نیز در a پیوسته است.

ل) اگر $|f|$ در نقطهٔ a پیوسته باشد، f نیز در a پیوسته است.

م) اگر f^2 در نقطهٔ a پیوسته باشد، f نیز در a پیوسته است.

ن) اگر f^2 در نقطهٔ a پیوسته باشد، $|f|$ نیز در a پیوسته است.

س) اگر f^3 در نقطهٔ a پیوسته باشد، f نیز در a پیوسته است.

ع) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته است اگر و فقط اگر توسیع پیوسته به $\mathbb{R}$ داشته باشد.

ف) فرض کنید I یک بازهٔ باز در $\mathbb{R}$ و $a\in I$ باشد. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در a پیوسته است اگر و فقط اگر $f\big|_I$ در a پیوسته باشد. (منظور از $f\big|_I$ یعنی تحدید تابع f بر بازهٔ I.)

مسئله ۱۱. بازه‌هایی را که $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+9}$ در آنها مثبت و منفی می‌باشد، بیابید.

مسئله ۱۲. نشان دهید $p(x)=x^3-x-1$، حداقل یک ریشه در بازهٔ $[1,2]$ دارد.

مسئله ۱۳. <u>تمرین ۳۰ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز:</u> نشان دهید $p(x)=x^3-15x+1$، دقیقاً سه ریشه در بازهٔ $[-4,4]$ دارد.

مسئله ۱۴. مشابه تمرین ۳۲ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: قضیهٔ مقدار بینی برای توابع پیوسته را بیان کنید. به‌کمک آن نشان دهید اگر $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته باشد، حداقل یک نقطه ثابت دارد. (c یک نقطهٔ ثابت برای f است اگر $f(c)=c$ باشد.)

مسئله ۱۵. به‌کمک قضیهٔ مقدار بینی برای توابع پیوسته، نشان دهید هر تابع پیوستهٔ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ ثابت است.

مسئله ۱۶. مشابه تمرین ۳۳ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید تابع f در مبدأ از راست پیوسته باشد. آیا وقتی‌که f زوج باشد، می‌توان در مورد پیوستگی f در مبدأ نظری داد؟

مسئله ۱۷. مشابه تمرین ۳۴ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید تابع f در مبدأ از راست پیوسته باشد. آیا وقتی‌که f فرد باشد، می‌توان در مورد پیوستگی f در مبدأ نظری داد؟

مسئله ۱۸. تمرینات ۳۵ تا ۳۸ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: با رسم نمودار، در مورد نقاطی که ماکسیمم و مینیمم توابع زیر رخ می‌دهند، بحث کنید.

آ) $f(x)=\dfrac{x^۲-۲x}{x^۴+۱}$ روی بازهٔ $[-۵,۵]$.

ب) $f(x)=\dfrac{\sin x}{۶+x}$ روی بازهٔ $[-\pi,\pi]$.

ج) $f(x)=x^۲+\dfrac{۴}{x}$ روی بازهٔ $[۱,۳]$.

د) $f(x)=\sin(\pi x)+x(\cos(\pi x)+۱)$ روی بازهٔ $[۰,۱]$.

مسئله ۱۹. نشان دهید توابع زیر در دامنهٔ تعریفشان پیوسته هستند.

آ) $y=\dfrac{x-۲}{x^۳-۴x}$.

ب) $y=\sqrt{x^۲-۵x-۵}$.

ج) $y=\dfrac{|x|}{\sqrt{|x+۲|}}$.

د) $y=\dfrac{x\sqrt{x}}{x^۲-۴x}$.

ه) $y=\dfrac{x\sqrt[۳]{x}}{x^۲-۴x}$.

و) $y=\dfrac{\tan x}{x}$.

مسئله ۲۰. با تعریف ϵ و δ برای پیوستگی، نشان دهید تابع $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

مسئله ۲۱. مطلوبست بررسی پیوستگی، پیوستگی چپ و پیوستگی راست تابع $f(x)=\lfloor a+x\rfloor$، در نقطهٔ ۱، برای مقادیر دلخواه a. (راهنمایی: مقادیر صحیح و غیرصحیح a را جداگانه در نظر بگیرید.)

مسئله ۲۲. نشان دهید تابع $f(x) = \frac{x^۲ - x}{x^۲ - ۱}$، یک توسیع پیوسته در نقطهٔ $x = ۱$ دارد و آن توسیع را مشخص کنید.

مسئله ۲۳. تابع $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ را روی بازهٔ $[-۱,۱] \setminus \{۰\}$ در نظر بگیرید. نشان دهید f یک توسیع پیوسته (در نقطهٔ $x = ۰$) دارد و آن توسیع را مشخص کنید.

مسئله ۲۴. نشان دهید اگر تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $x_۰$ پیوسته و $f(x_۰) \neq ۰$ باشد، آنگاه f در یک همسایگی حول $x_۰$، یک علامت دارد، یعنی یا مثبت است و یا منفی. (منظور از یک همسایگی حول $x_۰$، یعنی مجموعهٔ همهٔ xهایی به‌صورت $|x - x_۰| < \delta$ برای یک $\delta > ۰$.)

مسئله ۲۵. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ می‌باشد. نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ ماکسیمم مطلق دارد.

مسئله ۲۶. <u>تمرین شماره ۳۵ و ۳۶ مسائل مروری بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز:</u> فرض کنید $H(x)$ تابعی با ضابطهٔ زیر باشد.

$$H(x) = \begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰. \end{cases}$$

در مورد پیوستگی، پیوستگی چپ، پیوستگی راست، و ناپیوستگی توابع $f(x) = H(x-۱)$ و $g(x) = H(۹ - x^۲)$، بحث کنید.

مسئله ۲۷. <u>مشابه تمرین شماره ۱۱ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز:</u> فرض کنید f یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[۰,۱]$ و $f(۰) = f(۱)$ باشد. نشان دهید حداقل یک $۰ \leq a \leq \frac{۲}{۳}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(a) = f(a + \frac{۱}{۳})$. (راهنمایی: قضیهٔ مقدار بینی را برای $g(x) = f(x) - f(x + \frac{۱}{۳})$ به‌کار ببرید.)

مسئله ۲۸. <u>تمرین شماره ۸ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز:</u>

آ) فرض کنید f یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$ باشد. نشان دهید برد تابع f نیز یک بازهٔ بسته است.

ب) تمام امکان‌های ممکن برای برد یک تابع پیوستهٔ f با دامنهٔ (a,b) را بررسی کنید.

مسئله ۲۹. <u>تمرین شماره ۹ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز:</u> تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{|x^۲ - ۱|}$ را در نظر بگیرید. همهٔ نقاطی که f در آنها پیوسته نیست را بیابید. آیا f در این نقاط حد چپ یا راست دارد؟ در

صورت وجود آنها را بیابید.

مسئله ۳۰. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید تابع مشخصهٔ مجموعهٔ A، یعنی

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

پیوسته است اگر و فقط اگر $A = \mathbb{R}$ باشد.

مسئله ۳۱. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ x_n که به x همگرا باشد، داشته باشیم $f(x_n) \to f(x)$.

مسئله ۳۲. دو تابع پیوستهٔ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ روی مجموعهٔ اعداد گویا با هم برابر هستند. نشان دهید $f \equiv g$.

مسئله ۳۳. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته است و برای هر x و y در رابطهٔ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق می‌کند. نشان دهید $f(x) = f(۱)x$. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید پیوستگی در یک نقطه مانند $x_۰$، پیوستگی در تمام نقاط $\mathbb{R}$ را نتیجه می‌دهد.)

مسئله ۳۴. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است و برای هر x و y در رابطهٔ $f\left(\frac{x+y}{۲}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{۲}$ صدق می‌کند. نشان دهید a و b وجود دارند که $f(x) = ax + b$.
(راهنمایی: ابتدا نشان دهید پیوستگی در $x = ۰$، پیوستگی در تمام نقاط $\mathbb{R}$ را نتیجه می‌دهد.)

مسئله ۳۵. فرض کنید $f : [۱, +\infty) \to \mathbb{R}$ پیوسته و $\lim_{x\to+\infty} f(x+۱) - f(x) = L \in (-\infty, +\infty)$ باشد. نشان دهید

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L.$$

(راهنمایی: می‌توانید از این مطلب استفاده کنید که اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$، آن‌گاه $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n} = L$.)