

با یاد او

سری دوم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (مبحث حد و دنباله)

مسئله ۱. رفتار توابع زیر را در نزدیکی نقاط داده شده، به صورت تقریبی (با رسم نمودار و یا روش جبری) بررسی کنید.

(و) $f(x) = \frac{ x-2 }{x^2+x-6}$ در نقطه $x_0 = 2$.	(آ) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ در نقطه $x_0 = -2$.
(ز) $f(x) = (1+ x)^{\frac{1}{ x }}$ در نقطه $x_0 = 0$.	(ب) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ در نقطه $x_0 = 1$.
(ح) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ در نقطه $x_0 = 1$.	(ج) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ در نقطه $x_0 = 4$.
(ط) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه $x_0 = 0$.	(د) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ در نقطه $x_0 = -2$.
(ی) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ در نقطه $x_0 = 0$.	(ه) $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{5}}{x-5}$ در نقطه $x_0 = 5$.

مسئله ۲. (آ) نشان دهید مساحت یک n -ضلعی منتظم محاط در یک دایره به شعاع r ، برابر است با $\frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$. (راهنمایی:

n -ضلعی منتظم را به n مثلث همانند تقسیم کنید و مساحت هر مثلث را بیابید.)

(ب) به کمک تغییر متغیر $x = \frac{2\pi}{n}$ (توجه کنید که $x \rightarrow 0$ وقتی که $n \rightarrow \infty$)، و با قبول این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و

همچنین این مطلب که مساحت n -ضلعی منتظم محاط در یک دایره به شعاع r ، با میل کردن n به سمت بینهایت، به

مساحت دایره به شعاع r میل می‌کند، نشان دهید مساحت دایره به شعاع r ، برابر πr^2 است.

مسئله ۳. نقاط حدی مجموعه‌های زیر را (به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی) بیابید.

(ج) مجموعه $\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$	(آ) مجموعه $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
(د) مجموعه $\left\{ 2^{-n} + 5^{-m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$	(ب) مجموعه $\left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

مسئله ۴. برای تعریف حد یک تابع در نقطه $x = a$ ، آیا لازم است که نقطه a متعلق به دامنه تابع باشد؟ متعلق به نقطه حدی دامنه تابع چطور؟

مسئله ۵. دامنه تابع $g(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ را بیابید. آیا نقطه حدی دامنه تابع می‌باشد؟ آیا تابع $g(x)$ در نقطه $x = 0$ حد دارد؟ اگر جواب مثبت است، مقدار آن را نیز بیابید؟

مسئله ۶. فرض کنید $p(x)$ یک چند جمله‌ای باشد. به کمک خواص حد توابع، نشان دهید

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

مسئله ۷. با قبول این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و همچنین استفاده از خواص حد، نشان دهید

(آ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

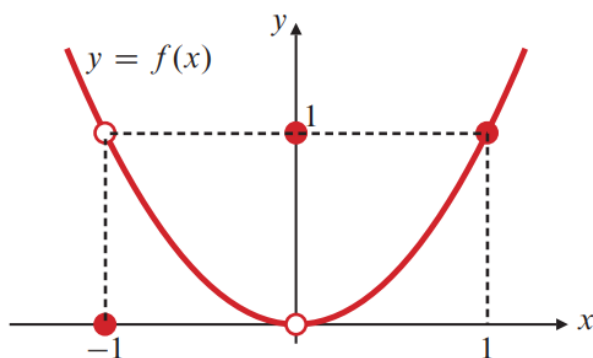
(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

مسئله ۸. بار دیگر روش اثبات $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ را مطالعه کنید. حال این بار با بررسی دقیق‌تر نشان دهید

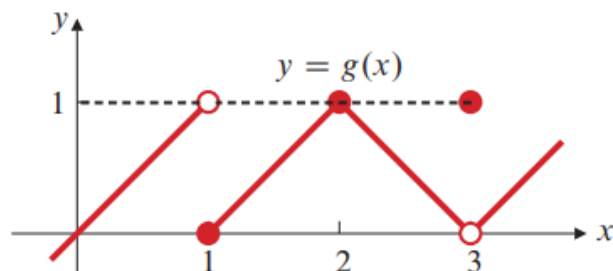
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0.$$

مسئله ۹. تمرین شماره ۱ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: حد تابع f با نمودار شکل زیر را در نقاط -1 ، 0 ، و 1 بیابید.



مسئله ۱۰. تمرین شماره ۲ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: در مورد وجود حد تابع g با نمودار شکل زیر در نقاط 1 ، 2 ، و 3

بحث کنید.



مسئله ۱۱. تمرینات ۱۶، ۱۸، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۵ و ۳۶ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز:

مطلوبست محاسبه حدود زیر

$$\begin{array}{ll} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 4\sqrt{y} + 3}{y^2 - 1} \quad (\text{ح}) & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 4h^2}{h^2 - h^3} \quad (\text{ا}) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} \quad (\text{ط}) & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \quad (\text{ب}) \\ \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x} - 2} \quad (\text{س}) & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2} \quad (\text{ج}) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \quad (\text{ک}) & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{4+t} - \sqrt{4-t}} \quad (\text{د}) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{x^2} \quad (\text{ل}) & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \quad (\text{ه}) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x} \quad (\text{م}) & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 3t}{(t+2)^2 - (t-2)^2} \quad (\text{و}) \\ & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1)^2 - (s-1)^2}{s} \quad (\text{ز}) \end{array}$$

مسئله ۱۲. تمرینات ۴۹ تا ۶۰ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: حد چپ و حد راست توابع زیر را (در صورت وجود) در نقاط داده شده بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{ا)} \quad y = \sqrt{2-x} \text{ در نقطه } x_0 = 2 & \text{د)} \quad y = \sqrt{x^2 - x^4} \text{ در نقطه } x_0 = 0 \\ \text{ب)} \quad y = \sqrt{2-x} \text{ در نقطه } x_0 = -2 & \text{ه)} \quad y = \frac{|x-a|}{x^2 - a^2} \text{ در نقطه } x_0 = a \\ \text{ج)} \quad y = \sqrt{x^3 - x} \text{ در نقطه } x_0 = 0 & \text{و)} \quad y = \frac{x^2 - 4}{|x+2|} \text{ در نقاط } x_0 = \pm 2 \end{array}$$

مسئله ۱۳. مشابه تمرین شماره ۶۵ و ۶۶ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$ حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{ا)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3) & \text{ز)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x) - 1} \\ \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} x f(x) & \text{ح)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{1+g(x)}}{|f(x)| - 1} \\ \text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^2 & \text{ط)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (f(x) + g(x)) \\ \text{د)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^3 & \text{س)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \cdot g(x) \\ \text{ه)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{f(x)} & \text{ک)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \forall f(x) \\ \text{و)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{f(x) + 6} & \end{array}$$

مسئله ۱۴. تمرین شماره ۶۷ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$ باشد، آنگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ چقدر است؟

مسئله ۱۵. تمرین شماره ۶۸ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$ باشد، آنگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ چقدر است؟

مسئله ۱۶. تمرین شماره ۷۸ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: دامنه تعریف تابع $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ را بیابید. آیا حد $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ وجود دارد؟ مقدار آن چیست؟ (راهنمایی: از قضیه ساندویچ استفاده کنید.)

مسئله ۱۷. تمرین شماره ۷۶ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز:

آ نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^4$ را در کنار هم رسم کنید. نمودارها کجا همدیگر را قطع می‌کنند و نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

ب) تابع $f(x)$ در شرایط زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} x^2 \leq f(x) \leq x^2 & x < -1, \text{ یا } x > 1, \\ x^4 \leq f(x) \leq x^2 & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

مقدار حد $f(x)$ را در نقاط $x = -1$ ، $x = 0$ ، و $x = 1$ بیابید.

مسئله ۱۸. تمرین شماره ۷۹ مسائل بخش دوم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی، و $|f(x)| \leq g(x)$ برای هر x برقرار باشد. با یک مثال نشان دهید ممکن است $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ولی $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود نباشد. در حالت $b = 0$ آیا می‌توان گفت

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

مسئله ۱۹. حد چپ و راست توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

<p>د) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$ در نقطه $x_0 = 2$.</p> <p>ه) $f(x) = \frac{2-x}{(x-2)^3}$ در نقطه $x_0 = 2$.</p> <p>و) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ در نقطه $x_0 = 0$.</p>	<p>آ) $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x_0 = 0$.</p> <p>ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در نقطه $x_0 = 0$.</p> <p>ج) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$ در نقطه $x_0 = 2$.</p>
--	---

مسئله ۲۰. رفتار توابع زیر را وقتی که x به اندازه دلخواه بزرگ می شود، چه مثبت و چه منفی، به صورت تقریبی (با رسم نمودار و یا روش جبری) بررسی کنید.

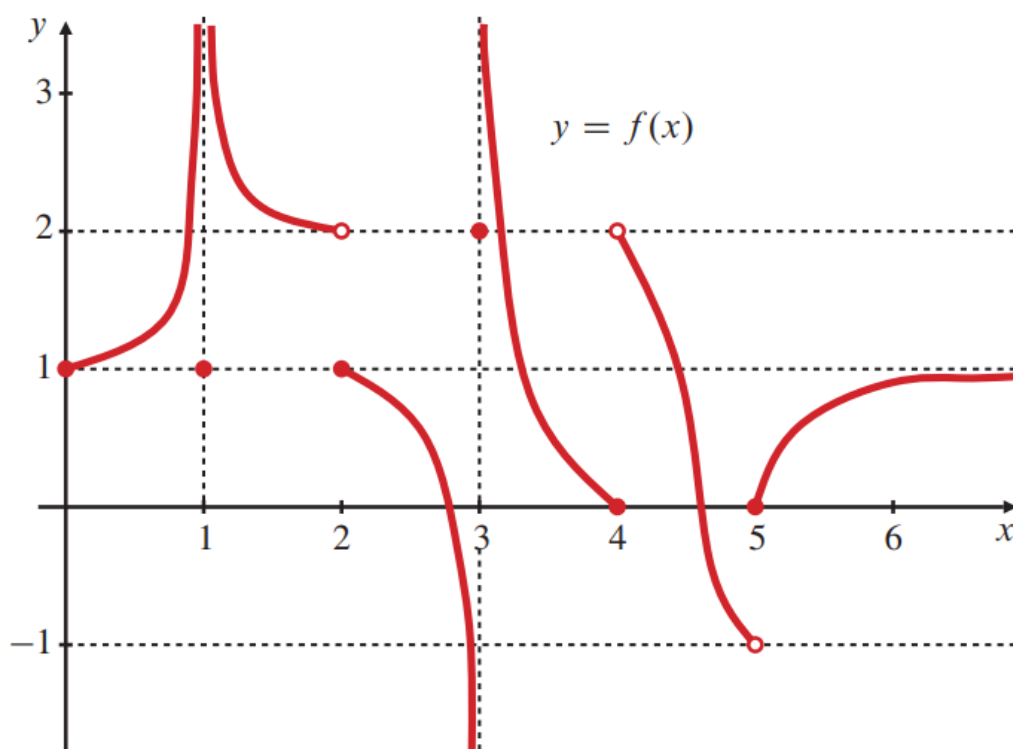
$f(x) = (\sqrt{x^2 + x} - x)$ (ط)	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (آ)
$f(x) = (\sqrt[3]{x^3 + x} - x)$ (ی)	$f(x) = \frac{1}{x^3}$ (ب)
$f(x) = (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x)$ (ک)	$f(x) = \frac{1}{x^4}$ (ج)
$f(x) = (\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} - x)$ (ل)	$f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5}$ (د)
$f(x) = (\sqrt[4]{x^4 + 2x^3 + 1} - x)$ (م)	$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ (ه)
$f(x) = \sin x$ (ن)	$f(x) = \frac{5x + 2}{2x^3 - 1}$ (و)
$f(x) = \frac{\cos x}{x}$ (س)	$f(x) = 3x^3 - x^2 + 2$ (ز)
$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ (ع)	$f(x) = x^4 - 5x^3 - x$ (ح)

مسئله ۲۱. برخی از تمرینات شماره ۱ تا ۳۲ مسائل بخش سوم فصل ۱ کتاب آدامز و مشابه آنها: مطلوبست محاسبه حدود زیر

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+1}(1-2\sqrt{2x+3})}{7-6x+4x^2}$ (ط)	$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{8})^+} \frac{2x+5}{5x+2}$ (آ)
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x})$ (ی)	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{(2-x)^3}$ (ب)
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x}$ (ک)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{ x-1 }$ (ج)
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}$ (ل)	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{ x-1 }$ (د)
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3+2x} - \sqrt[3]{x^3-2x})$ (م)	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ه)
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-2x^2+1})$ (ن)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-x^2}$ (و)
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[4]{x^4+x+1} - \sqrt[4]{x^4-x^2-2})$ (س)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2\sqrt{x}}{1-x}$ (ز)
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[4]{x^4+x^3+1} - \sqrt[4]{x^4-x^3-2})$ (ع)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$ (ح)

مسئله ۲۲. تمرینات شماره ۳۵ تا ۴۶ مسائل بخش سوم فصل ۱ کتاب آدامز: در مورد حد چپ و راست تابع f با نمودار شکل زیر در

نقاط ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ بحث کنید. رفتار تابع در مثبت بینهایت چگونه است؟



مسئله ۲۳. مشابه تمرینات شماره ۴۷ تا ۵۲ مسائل بخش سوم فصل ۱ کتاب آدامز: حد چپ و راست تابع جزء صحیح، یعنی $y = [x]$ را در نقاط صحیح و غیر صحیح بررسی کنید.

مسئله ۲۴. مطلوبست محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = [a + x]$ ، در نقطه a ، برای مقادیر دلخواه a . (راهنمایی: مقادیر صحیح و غیر صحیح a را جداگانه در نظر بگیرید.)

مسئله ۲۵. تمرین شماره ۵۴ مسائل بخش سوم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$ باشد. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ را وقتی که f زوج و همچنین وقتی که f فرد باشد، بیابید.

مسئله ۲۶. تمرین شماره ۵۵ مسائل بخش سوم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = B$ باشد. در این صورت مطلوبست محاسبه

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x^4)$

(آ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x)$

(د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x^4)$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$

مسئله ۲۷. نشان دهید حد یک چند جمله‌ای در $\pm\infty$ به زوج و یا فرد بودن درجه جمله‌ای و همچنین علامت ضریب بزرگ‌ترین توان آن بستگی دارد. مقدار حد را نیز برحسب این عبارات مشخص کنید.

مسئله ۲۸. تمرین شماره ۱۱ مسائل مروری بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

مسئله ۲۹. تمرین شماره ۳ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|5 - 2x| - |x - 2|}{|x - 5| - |3x - 7|}$$

مسئله ۳۰. مشابه تمرین شماره ۶ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{1+a}}{a}$$

(راهنمایی: از فرمول معروف زیر، یعنی همان روش گویا کردن)

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

استفاده کنید.)

مسئله ۳۱. تمرین شماره ۱۴ مسائل مروری بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{x+3h} - \sqrt{x}}$$

مسئله ۳۲. تمرین شماره ۴ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$$

مسئله ۳۳. تمرین شماره ۵ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sqrt[3]{7+x} - 2}$$

مسئله ۳۴. مشابه تمرین شماره ۷ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: درستی و یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص

کنید.

(اگر $f(x) < g(x)$ برای هر x برقرار و حدود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجود باشند، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ب) اگر $f(x) < g(x)$ برای هر x برقرار و حدود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجود باشند، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ج) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود ولی $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجود نباشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود نیست.

د) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجود نباشند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ نیز موجود نیست.

مسئله ۳۵. نشان دهید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در هیچ نقطه از اعداد حقیقی حد ندارد.

مسئله ۳۶. نشان دهید تابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n}, \quad m \text{ و } n \text{ دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در تمام نقاط حد دارد و حد آن صفر است.

مسئله ۳۷. نشان دهید اگر تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در x_0 دارای حد $L \neq 0$ باشد، آنگاه f در یک همسایگی محذوف حول x_0 با L

همعلامت است. (منظور از یک همسایگی محذوف حول x_0 ، یعنی مجموعه همه x ‌هایی به صورت $0 < |x - x_0| < \delta$ برای یک $\delta > 0$).

مسئله ۳۸. مشابه تمرینات شماره ۱ تا ۱۳ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: دنباله‌های زیر را از لحاظ کران‌داری، صعودی و یا

نزولی بودن، بررسی کنید.

ا) $a_n = (-1)^{n-1}$

آ) $a_n = n$

ب) $a_n = (-1)^n n$

ب) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ج) $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$

ج) $a_n = \frac{n-1}{n}$

ح) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

د) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

$$.a_n = \frac{2n}{1+n^2} \text{ (س)}$$

$$.a_n = \frac{2n^2}{1+n^2} \text{ (ع)}$$

$$.a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ (ف)}$$

$$.a_n = \frac{\sin n}{n} \text{ (ص)}$$

$$.a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ (ق)}$$

$$.a_n = \frac{2^2}{n^n} \text{ (ط)}$$

$$.a_n = \frac{e^n}{\pi^n} \text{ (ی)}$$

$$.a_n = \frac{e^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \text{ (ک)}$$

$$.a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} \text{ (ل)}$$

$$.a_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \text{ (م)}$$

$$.a_n = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ (ن)}$$

مسئله ۳۹. مشابه تمرینات شماره ۱۴ تا ۲۹ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: دنباله‌های زیر را از لحاظ همگرایی و واگرایی بررسی

کنید و در صورت همگرا بودن، مقدار حد را نیز بیابید.

$$.a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 1} \text{ (س)}$$

$$.a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^3 + 1} \text{ (ع)}$$

$$.a_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \text{ (ف)}$$

$$.a_n = \frac{n}{\ln(n+1)} \text{ (ص)}$$

$$.a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n} \text{ (ق)}$$

$$.a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \text{ (ر)}$$

$$.a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1} \text{ (ش)}$$

$$.a_n = \sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n^2 - 1} \text{ (ت)}$$

$$.a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2} \text{ (ث)}$$

$$.a_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^3 - 1} - \sqrt[4]{n^4 - 4n^3 + 4} \text{ (خ)}$$

$$.a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ (ذ)}$$

$$.a_n = \frac{n^2 2^n}{n!} \text{ (ض)}$$

$$.a_n = \frac{\pi^n}{1 + 2^n} \text{ (ظ)}$$

$$.a_n = n \text{ (آ)}$$

$$.a_n = -n \text{ (ب)}$$

$$.a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ (ج)}$$

$$.a_n = \frac{n-1}{n} \text{ (د)}$$

$$.a_n = (-1)^n \text{ (ه)}$$

$$.a_n = n \cos(n\pi) \text{ (و)}$$

$$.a_n = \frac{n^2}{2^n} \text{ (ز)}$$

$$.a_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \text{ (ح)}$$

$$.a_n = \frac{n}{1+n^2} \text{ (ط)}$$

$$.a_n = \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} \text{ (ی)}$$

$$.a_n = \frac{2n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2} \text{ (ک)}$$

$$.a_n = \frac{\cos n + \sin n}{n} \text{ (ل)}$$

$$.a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ (م)}$$

$$.a_n = n \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ (ن)}$$

مسئله ۴۰. فرض کنید $p > 0$ باشد. به کمک تعریف ϵ و δ برای حد دنباله‌ها، نشان دهید $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

مسئله ۴۱. فرض کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ باشد. قرار دهید $a_n = f(n)$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

مسئله ۴۲. فرض کنید $a_1 = a_2 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ، برای $n \geq 3$. نشان دهید دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمی‌تواند همگرا باشد. (این دنباله، به دنباله فیبوناچی مشهور است.)

مسئله ۴۳. تمرین شماره ۳۰ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: دنباله حقیقی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به گونه‌ای است که

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

نشان دهید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی و از بالا کراندار است و در نتیجه همگرا است. (راهنمایی: نشان دهید ۳ یک کران بالای

دنباله a_n است.) همچنین به کمک خواص حد دنباله‌ها، نشان دهید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 + \sqrt{2}$.

مسئله ۴۴. تمرین شماره ۳۱ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: فرض کنید $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ باشد. نشان دهید دنباله a_n صعودی است.

همچنین نشان دهید e یک کران بالا برای دنباله a_n است. سپس نتیجه بگیرید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq e$. (راهنمایی: دنباله

$\ln a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ را در نظر بگیرید و از خواص تابع لگاریتمی استفاده کنید.)

مسئله ۴۵. با قبول این که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ، و خواص حد دنباله‌ها، نشان دهید $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n = \frac{1}{e^3}$.

مسئله ۴۶. مشابه تمرین شماره ۳۴، ۳۵ و ۳۶ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: درستی و یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(آ) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ ، و $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L > 0$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = +\infty$.

(ب) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ ، و $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = 0$.

(ج) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ ، و $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = -\infty$.

(د) اگر a_n و b_n هر دو واگرا باشند، آنگاه $a_n b_n$ نیز واگرا است.

(ه) اگر a_n و b_n هر دو واگرا باشند، آنگاه $a_n + b_n$ نیز واگرا است.

(و) اگر $|a_n|$ همگرا باشد، a_n نیز همگرا است.

(ز) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

(ح) اگر $|a_n|$ کراندار باشد، a_n نیز کراندار است.

ط) اگر $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$ و $a_n < b_n$ ، آنگاه $a < b$.

ی) اگر $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$ و $a_n < b_n$ ، آنگاه $a \leq b$.

ک) هر دنباله همگرا، کراندار است.

ل) هر دنباله صعودی و کراندار، همگرا است.

م) هر دنباله حقیقی یا یک زیر دنباله صعودی دارد یا یک زیر دنباله نزولی.

ن) هر دنباله حقیقی و کراندار یک زیر دنباله همگرا دارد.

س) دنباله صعودی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است اگر و فقط اگر کراندار باشد.

ع) دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به a همگرا است اگر و فقط اگر هر زیر دنباله آن یک زیر دنباله همگرا به a داشته باشد.

ف) دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است اگر و فقط اگر هر زیر دنباله آن یک زیر دنباله همگرا داشته باشد.

ص) دنباله $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ همگرا است.

ق) اگر $|x| < 1$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

ر) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ، برای هر x حقیقی.

مسئله ۴۷. مطلوبست محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n}.$$

مسئله ۴۸. فرض کنید $\gamma > 0$ یک عدد گنگ و $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد گویای مثبت باشد که $a_n \rightarrow \gamma$ همچنین فرض کنید

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \text{ کسری باشد که تا حد امکان ساده شده باشد و } \alpha_n \text{ و } \beta_n \text{ مثبت باشند. نشان دهید } \beta_n \rightarrow +\infty.$$

مسئله ۴۹. آ) نشان دهید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه a حد L دارد اگر و فقط اگر برای هر دنباله a_n که به a همگرا باشد و

$$a_n \neq a, \text{ داشته باشیم } f(a_n) \rightarrow L.$$

ب) نشان دهید $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x = 0$ حد ندارد. (راهنمایی: دنباله‌های $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ و $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ را در نظر

بگیرید و از قسمت قبل کمک بگیرید.)

مسئله ۵۰. نشان دهید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x_0 حد دارد اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\text{برای هر } r \text{ و } s \text{ در } |x - x_0| < \delta, \text{ داشته باشیم } |f(r) - f(s)| < \epsilon.$$