

# با یاد او

## سری صفرم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (مروری بر گذشته)

**مسئله ۱.** نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی دلخواه  $a$  و  $b$  داریم

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

**مسئله ۲.** طول یک پاره خط را برحسب مختصات نقاط ابتدا و انتهای آن بیابید. فاصله دو نقطه متمایز چه ارتباطی با طول پاره خط واصل بین آن دو دارد؟

**مسئله ۳.** مثلث با رئوس  $A = (2, 1)$ ،  $B = (6, 4)$ ، و  $C = (5, -3)$  چه نوع مثلثی است؟ مثلث با رئوس  $A = (0, 0)$ ،  $B = (1, \sqrt{3})$ ، و  $C = (2, 0)$  چگونه؟

**مسئله ۴.** اگر نقاط  $A = (2, -1)$ ،  $B = (1, 3)$ ، و  $C = (-3, 2)$  رئوس یک مربع باشد، مختصات رأس چهارم را مشخص کنید.

**مسئله ۵.** آ) مختصات مرکز یک پاره خط را برحسب مختصات نقاط ابتدا و انتهای آن بیابید.

ب) مختصات نقطه‌ای از یک پاره خط را طوری بیابید که فاصله آن از ابتدای پاره خط دو برابر فاصله آن تا انتهای پاره خط باشد.

**مسئله ۶.** دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ: } f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)} & \text{ج: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|} - \sqrt{x-2}} \\ \text{ب: } f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}} & \text{د: } f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{|x|}} \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

**مسئله ۷.** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ:  $y = x^n$ ، برای مقادیر مختلف  $n$ .

ب:  $y = \sqrt[n]{|x|}$ ، برای مقادیر مختلف  $n$ .

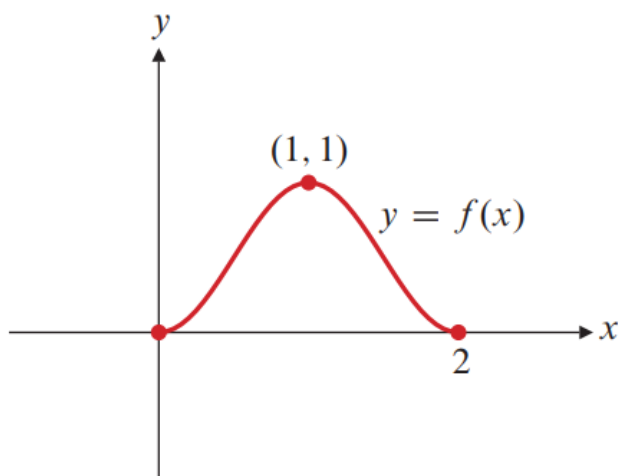
ج:  $y = \frac{1}{|x|^n}$ ، برای مقادیر مختلف  $n$ .

د:  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، برای مقادیر مختلف ضرایب  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ، و  $d$ .

ه:  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ، برای مقادیر مختلف  $R$ .

و:  $y = x^2 - [x^2]$ .

**مسئله ۸.** فرض کنید  $y = f(x)$  تابعی با دامنه  $[0, 2]$ ، برد  $[0, 1]$ ، و نمودار زیر باشد.



دامنه، برد، و نمودار توابع زیر را مشخص کنید.

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| ل: $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$      | آ: $g(x) = f(x) - 1$         |
| م: $g(x) = 1 + f\left(-\frac{x}{2}\right)$ | ب: $g(x) = f(x) + 2$         |
| ن: $g(x) = 2f\left(\frac{x-1}{2}\right)$   | ج: $g(x) = f(x-1)$           |
| س: $g(x) = f( x )$                         | د: $g(x) = f(x+2)$           |
| ع: $g(x) = f(\sqrt{x})$                    | ه: $g(x) = -f(x)$            |
| ف: $g(x) = f(\sqrt{ x })$                  | و: $g(x) = f(-x)$            |
| ص: $g(x) = f(x^2)$                         | ز: $g(x) = f(4-x)$           |
| ق: $g(x) = f(x^3)$                         | ح: $g(x) = 1 - f(1-x)$       |
| ر: $g(x) = f( x ^3)$                       | ط: $g(x) = 2f(x)$            |
|  | ی: $g(x) = f(2x)$            |
|  | ک: $g(x) = -\frac{1}{3}f(x)$ |

**مسئله ۹.** در هر کدام از موارد زیر در مورد دامنه، برد، و ضابطه توابع  $f \circ g$ ،  $f \circ f$ ،  $\frac{g}{f}$ ،  $\frac{f}{g}$ ،  $f \cdot g$ ،  $f - g$ ،  $f + g$  بحث کنید.

- |  |   |
|--|---|
| آ: $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ و $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ | د: $g(t) = \sqrt{1-t}$ و $f(t) = \sqrt[3]{t}$ |
| ب: $g(x) = \ln x$ و $f(x) = \ln x $                    | ه: $g(t) = t+1$ و $f(t) = \sqrt{t}$           |
| ج: $g(t) = \sqrt{1-t}$ و $f(t) = \sqrt{t}$             | و: $g(t) = t+1$ و $f(t) = \sqrt[3]{t}$        |

**مسئله ۱۰.** اگر  $f$  و  $g$  دو تابع به ترتیب زوج و فرد با دامنه  $\mathbb{R}$  باشند، در مورد زوج و فرد بودن هر کدام از توابع  $f + g$ ،  $f - g$ ،  $f \cdot g$ ،  $\frac{f}{g}$ ،  $\frac{g}{f}$ ،  $f \circ f$ ،  $f \circ g$ ،  $g \circ f$  و  $g \circ g$ ، بحث کنید.

**مسئله ۱۱.** نشان دهید هر تابع با دامنه متقارن حول مبدأ را می توان به صورت یکتا به شکل جمع یک تابع فرد و یک تابع زوج نوشت.

**مسئله ۱۲.** اگر یک تابع با دامنه  $(-\infty, +\infty)$ ، هم زوج و هم فرد باشد، چه در مورد آن می توان گفت؟

**مسئله ۱۳.** مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که

- |   |  |
|---|--|
| آ: $d \geq 0$ و $ x-1  +  x+1  = (>)d$                    | م: $0 < x^2 + y^2 - 2x - y \leq 1$               |
| ب: $d \geq 0$ و $ x-1  -  x+1  = (\leq)d$                 | ن: $x^2 + y^2 < 2x$ و $x^2 + y^2 \leq 2y$        |
| ج: $3 \leq  x-1  +  x+1  < 9$                             | س: $x^2 + y^2 - 4x + 2y > (\leq)4$ و $x + y > 0$ |
| د: $ x  +  y  = (<)1$                                     | ع: $x^2 + y^2 > (\leq)4$ یا $x + y = 2$          |
| ه: $1 > (\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2})$ و $x, y \geq 0$  | ف: $1 \geq (\frac{x-1}{x+4})$                    |
| و: $1 > ( x ^3 +  y ^3)$                                  | ص: $0 < (\frac{x+2}{x^2+2x+3})$                  |
| ز: $1 > (x^3 + y^3)$                                      | ق: $1 > (\frac{x+2}{x^2-2x+3})$                  |
| ح: $1 > (x^2 + y^2)$                                      | ر: $1 < \frac{x+2}{x^2-2x+3} < 2$                |
| ط: $1 > (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ و $x, y < 0$ | ش: $0 < (\frac{x-1}{x^2+x})$                     |
| ی: $1 > ( xy )$   |  |
| ک: $1 \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})$                         |  |
| ل: $0 \geq (x^2 + y^2 - 2x - y + 1)$                      |  |

**مسئله ۱۴.** تعداد ریشه های مثبت چند جمله ای  $p(t) = t^3 - 2t^2 - 12t - 11$  را بیابید.

**مسئله ۱۵.** اگر چند جمله ای  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  با (احتساب تکرار) دارای  $m > n$  ریشه باشد، در مورد  $p(x)$  چه می توان گفت؟

**مسئله ۱۶.** چند جمله ای های زیر را به ساده ترین عوامل تجزیه کنید و در مورد تعداد ریشه ها و تکرار آن ها بحث کنید.

- |                              |                            |
|------------------------------|----------------------------|
| آ: $x^3 - x^2 - 4x + 4$      | و: $x^3 + 1$               |
| ب: $x^4 + 3x^2 - 4$          | ز: $x^5 - x^4 - 16x + 16$  |
| ج: $x^5 - x^4 - x^2 + x$     | ح: $x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$  |
| د: $x^3(x^2 + 2x + 5)^2$     | ط: $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$ |
| ه: $x^9 - 4x^7 - x^6 + 4x^4$ |                            |

**مسئله ۱۷.** درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

**مسئله ۱۸.** درستی تجزیه  $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$  را تحقیق کنید.

**مسئله ۱۹.** با تقسیم چندجمله‌ای  $p(x) = x^4 + x^2$  بر چندجمله‌ای  $q(x) = x^3 + x^2 + 1$  داریم

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

چندجمله‌ای‌های  $s(x)$  و  $r(x)$  را بیابید.

**مسئله ۲۰.** با تقسیم چندجمله‌ای  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x + 4$  بر چندجمله‌ای  $q(x) = x^2 + 1$  داریم

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

چندجمله‌ای‌های  $s(x)$  و  $r(x)$  را بیابید.

**مسئله ۲۱.** اگر  $[x]$  نشان دهنده تابع جزء صحیح در نقطه  $x$  باشد، نشان دهید برای هر عدد حقیقی  $x$ ، و هر عدد

طبیعی  $n$  داریم

$$[nx] = [x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right].$$

**مسئله ۲۲.** نمودار توابع  $\sin x$ ،  $\cos x$ ،  $\tan x$ ،  $\cot x$ ،  $\csc x$  و  $\sec x$  را در یک دوره تناوب رسم کنید.

**مسئله ۲۳.** معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\text{آ: } \cos \theta = -\frac{5}{13}, \quad \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \text{ د:}$$

$$\text{آ: } \sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

$$\text{ب: } \sin \theta = -\frac{1}{2}, \quad \theta \in \left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ ه:}$$

$$\text{ب: } \tan \theta = 2, \quad \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{و: } \tan \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta \in \left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\text{ج: } \cos \theta = \frac{1}{3}, \quad \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, 0 \right]$$

**مسئله ۲۴.** روابط زیر در مورد نسبت‌های مثلثاتی را تحقیق کنید.

$$\text{آ: } \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{ب: } \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\text{ج: } \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\text{د: } \sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}, \quad \cot x - \tan x = 2 \cot 2x \quad \text{و:}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \quad \text{و:}$$

$$\sin(2x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos(2x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{ز:}$$

$$a \sin x + b \cos x = \frac{a}{|a|} \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(x + \tan^{-1} \frac{b}{a}\right) \quad \text{ح:}$$

**مسئله ۲۵.** تحقیق کنید که

آ:

$$\sin^2 x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ب:

$$\cos^2 x = \cos^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ج:

$$\tan^2 x = \tan^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**مسئله ۲۶.** به کمک اتحادها و مقادیر معروف برای نسبت‌های مثلثاتی، نشان دهید

$$\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

به کمک این دو، مقدار  $\sin(3^\circ)$  را بیابید.

**مسئله ۲۷.** قوانین تبدیل ضرب به جمع و جمع به ضرب را در نسبت‌های مثلثاتی بیان کنید.

**مسئله ۲۸.** نشان دهید نمودار  $xy = 1$ ، از دوران نمودار هذلولی  $x^2 - y^2 = 2$ ، به اندازه  $45^\circ$  در جهت مثلثاتی به دست می‌آید.

**مسئله ۲۹.** اگر زاویه بین دو خط در صفحه با شیب‌های  $m_1$  و  $m_2$  باشد، نشان دهید

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

نتیجه بگیرید حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم  $-1$  می‌باشد.

**مسئله ۳۰.** قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها را در یک مثلث بیان کنید.

**مسئله ۳۱.** نشان دهید مساحت مثلث با طول اضلاع  $a$ ،  $b$ ، و  $c$ ، برابر است با

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

که در آن  $s = \frac{a+b+c}{2}$ ، نصف محیط مثلث است.