

با یاد او

سری یازدهم تمرین‌های ریاضی عمومی یک

مسئله ۱. تمرین ۲۶ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت زیر نمودار $y = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$ ، بالای محور x ها، و سمت راست محور y ها.

مسئله ۲. تمرینات ۳۰ تا ۴۱ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست بررسی همگرایی یا واگرایی در هر کدام از موارد زیر.

<p>(ز) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$</p> <p>(ح) $\int_0^{+\infty} \frac{ \sin x }{x^2} dx$</p> <p>(ط) $\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1 - \cos \sqrt{x}}$</p> <p>(ی) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \csc x dx$</p> <p>(ک) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \ln x}$</p> <p>(ل) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{xe^x}$</p>	<p>(آ) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^5 + 1} dx$</p> <p>(ب) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$</p> <p>(ج) $\int_2^{+\infty} \frac{x\sqrt{x} dx}{x^2 - 1}$</p> <p>(د) $\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$</p> <p>(ه) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$</p> <p>(و) $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx$</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

مسئله ۳. تمرینات ۱ تا ۴ مسائل بخش ششم فصل ۶ کتاب آدامز: تقریب‌های T_4, M_4, T_8, M_8 و T_{16} را برای انتگرال‌های داده شده زیر، محاسبه کنید. همچنین، مقدار دقیق انتگرال‌ها را نیز محاسبه کنید و مقدار دقیق خطا را نیز بیابید. حال با یافتن یک کران بالا برای خطای تقریب‌ها، به کمک قضیه‌های کتاب آدامز، آنها را با خطاهای دقیق، مقایسه و نتیجه‌گیری کنید. (توجه: T_n و M_n به ترتیب، تقریب میانی و تقریب دوزنقه، با افراز بازه انتگرال‌گیری به n قسمت مساوی، می‌باشد.)

<p>(ج) $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$</p> <p>(د) $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$</p>	<p>(آ) $I = \int_0^2 (1+x^2) dx$</p> <p>(ب) $I = \int_0^1 e^{-x} dx$</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------

مسئله ۴. تمرینات ۱ تا ۴ مسائل بخش اول فصل ۷ کتاب آدامز: حجم هر کدام از موارد زیر را با روش برش دادن و یا با روش قاچ‌های استوانه‌ای، پیدا کنید.

- (آ) حجم حاصل از دوران ناحیه کران‌دار محدود به $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$ ، حول محور x ها.
- (ب) حجم حاصل از دوران ناحیه کران‌دار محدود به $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$ ، حول محور y ها.

ج) حجم حاصل از دوران ناحیه کراندار محدود به $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ و بین $x = 0$ تا $x = 1$ حول محور x ها.

د) حجم حاصل از دوران ناحیه کراندار محدود به $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ و بین $x = 0$ تا $x = 1$ حول محور y ها.

مسئله ۵. تمرین ۳ مسائل بخش دوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه حجم جسمی با ارتفاع ۱ که سطح مقطع‌های آن در ارتفاع z ، بیضی‌هایی با قطرهای $2z$ و $2\sqrt{1-z^2}$ باشند.

مسئله ۶. تمرین ۳ مسائل بخش سوم فصل ۷ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه طول نمودار تابع $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ از $x = 0$ تا $x = 8$.

مسئله ۷. مشابه تمرینات شماره ۱ تا ۱۳ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: دنباله‌های زیر را از لحاظ کراننداری، صعودی و یا نزولی بودن، بررسی کنید.

$a_n = \frac{e^n}{\pi^{\frac{1}{n}}}$ (ک)	$a_n = n$ (آ)
$a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$ (ل)	$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (ب)
$a_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$ (م)	$a_n = \frac{n-1}{n}$ (ج)
$a_n = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (ن)	$a_n = \frac{n^2-1}{n}$ (د)
$a_n = \frac{2n}{1+n^2}$ (س)	$a_n = (-1)^{n-1}$ (ه)
$a_n = \frac{2n^2}{1+n^2}$ (ع)	$a_n = (-1)^n n$ (و)
$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (ف)	$a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$ (ز)
$a_n = \frac{\sin n}{n}$ (ص)	$a_n = \frac{n^2}{2n}$ (ح)
$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (ق)	$a_n = \frac{2^2}{n^n}$ (ط)
	$a_n = \frac{e^n}{\pi^n}$ (ی)

مسئله ۸. مشابه تمرینات شماره ۱۴ تا ۲۹ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: دنباله‌های زیر را از لحاظ همگرایی و واگرایی بررسی کنید و در صورت همگرا بودن، مقدار حد را نیز بیابید.

$a_n = \frac{n-1}{n}$ (د)	$a_n = n$ (آ)
$a_n = (-1)^n$ (ه)	$a_n = -n$ (ب)
$a_n = n \cos(n\pi)$ (و)	$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (ج)

$a_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$ (ف)	$a_n = \frac{n^2}{2n}$ (ز)
$a_n = \frac{n}{\ln(n+1)}$ (ص)	$a_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n}$ (ح)
$a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$ (ق)	$a_n = \frac{n}{1+n^2}$ (ط)
$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (ر)	$a_n = \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3}$ (ی)
$a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}$ (ش)	$a_n = \frac{2n^2 - 2\sqrt{n+1}}{1 - n - 3n^2}$ (ک)
$a_n = \sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n^3 - 1}$ (ت)	$a_n = \frac{\cos n + \sin n}{n}$ (ل)
$a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$ (ث)	$a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (م)
$a_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^3 - 1} - \sqrt[4]{n^4 - 4n^3 + 4}$ (خ)	$a_n = n \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ (ن)
$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (ذ)	$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 1}$ (س)
$a_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$ (ض)	$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^3 + 1}$ (ع)
$a_n = \frac{\pi^n}{1 + 2^{2n}}$ (ظ)	

مسئله ۹. تمرین شماره ۳۰ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: دنباله حقیقی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به گونه ای است که

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

نشان دهید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی و از بالا کراندار است و در نتیجه همگرا است. (راهنمایی: نشان دهید ۳ یک کران بالای دنباله a_n است.) همچنین به کمک خواص حد دنباله ها، نشان دهید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 + \sqrt{2}$

مسئله ۱۰. تمرین شماره ۳۱ مسائل بخش ۱ فصل ۹ کتاب آدامز: فرض کنید $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ باشد. نشان دهید دنباله a_n صعودی است. همچنین نشان دهید e یک کران بالا برای دنباله a_n است. سپس نتیجه بگیرید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq e$. (راهنمایی: دنباله $\ln a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ را در نظر بگیرید و از خواص تابع لگاریتمی استفاده کنید.)

مسئله ۱۱. تمرینات ۱ تا ۲۶ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: همگرایی یا واگرایی سری های زیر را تحقیق کنید.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 - 2}$ (ب)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ (آ)
---------------------------------------------	---------------------------------------------

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4}$ (س)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$ (ج)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}}$ (ع)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$ (د)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(n+1)}}$ (ف)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left \sin \frac{1}{n^2} \right $ (ه)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ (ص)	$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n + 5}$ (و)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$ (ق)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$ (ز)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! 6^n}{(3n)!}$ (ر)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n)}$ (ح)
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$ (ش)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$ (ط)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100} 2^n}{\sqrt{n!}}$ (ت)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$ (ی)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}$ (ث)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ (ک)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}$ (خ)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$ (ل)
$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$ (ذ)	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$ (م)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$ (ض)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$ (ن)

مسئله ۱۲. تمرین ۳۹ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: به کمک آزمون ریشه، نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

مسئله ۱۳. تمرین ۴۰ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: به کمک آزمون نسبت، نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

مسئله ۱۴. تمرینات ۱ تا ۱۲ مسائل بخش چهارم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، وضعیت مجموع‌های داده شده را از لحاظ همگرایی مطلق، همگرایی مشروط و واگرا بودن، مشخص کنید.

(ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi^n}$	(آ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
(ح) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2 + 1}$	(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n}$
(ط) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot n^2 - n - 1}{n^3 + n^2 + 33}$	(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1) \ln(n+1)}$
(ی) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos(n\pi)}{2n+3}$	(د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$
(ک) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n}$	(ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - 1)}{n^2 + 1}$
(ل) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \sqrt{2})\pi}{\ln \ln n}$	(و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$

مسئله ۱۵. تمرین ۲۷ مسائل بخش چهارم فصل ۹ کتاب آدامز: درستی و یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(آ) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ نیز همگرا است.

(ب) اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگرا باشند، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

(ج) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگرای مطلق باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرای مطلق است.