

با یاد او

سری چهاردهم تمرینات ریاضی مهندسی

مسئله ۱. تعیین کنید هر یک از توابع زیر در کدام نقاط هم‌مدیس است.

(آ) $f(z) = z^4 + z^2$

(ج) $f(z) = e^{z^3}$

(ب) $f(z) = \sin z$

(د) $f(z) = \tan z$

مسئله ۲. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = (1-i)z + 2 - i$ به دست آورید.

(آ) خط $y = -1$

(ج) سهمی $y = 1 - x^2$

(ب) دیسک $|z - 3| < 2$

(د) $\{x > 0, y > 0, x + 2y > 3\}$

مسئله ۳. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به دست آورید.

(آ) هذلولی $x^2 - y^2 = 1$

(ج) $\{-2 < x < -1, |y| < 1\}$

(ب) سهمی $x = y^2$

(د) $\{y < 1 - x^2, x > 0, y > 0\}$

مسئله ۴. تصویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید.

(آ) خط $x = 2$ و $y = 3$

(ج) میدان $|z| > 1$ و $|z| < \frac{\pi}{4}$

(ب) خط $2x + 3y = 1$

(د) $\{y > x^2, x > 0, y > 0\}$

مسئله ۵. تصویر نواحی زیر را تحت $w = z^3$ تعیین کنید.

(آ) خط $x = 1$ و $y = -1$

(ج) میدان $|z| < 1$ و $|z| < \frac{\pi}{6}$

(ب) خط $x + y = 1$

(د) $\{y > x^2, x > 0, y > 0\}$

مسئله ۶. تصویر نواحی زیر را تحت $w = e^z$ به دست آورید.

(آ) خط $x + y = 1$

(ج) $\{x > 0, y > 0, x < 1 - y^2\}$

(ب) منحنی $x^2 - y^2 = 1$

(د) $\{0 < y < \frac{\pi}{4}, x > 0\}$

مسئله ۷. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt{z}$ به دست آورید.

(آ) خط $x - y = 1$

(ج) $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$

(ب) نیم‌دایره $x^2 + y^2 = 1, y > 0$

(د) $\{y > 0, y < 1 - x^2\}$

مسئله ۸. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt[4]{z}$ تعیین کنید.

- (آ) خط $x = 1$ و $y = 1$.
 (ب) خط $x + y = 1$.
 (ج) $\{x > 0, y = 1 - x^2\}$.
 (د) $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$.

مسئله ۹. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت $w = \sin z$ بیابید.

- (آ) خط $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = 1$.
 (ب) خط $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = 0$.
 (ج) $\{y > 0, |x| < \frac{\pi}{4}\}$.
 (د) $\{1 < y < 2, |x| < \frac{\pi}{4}\}$.

مسئله ۱۰. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت نگاشت خطی $w = (1 - \sqrt{3}i)z + 3 - 2i$ با روش هندسی بیابید.

- (آ) $\{0 < r < 1, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}\}$.
 (ب) $\{x > 0, y > 0, x + y < 0\}$.
 (ج) $\{1 < x^2 + y^2 < 2, y > 0\}$.
 (د) $\{x < 0, 0 < y < \pi\}$.

مسئله ۱۱. تصویر میدان $\{x > 0, 2 < y < 1 + x\}$ را با هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

- (آ) $w = \frac{1}{z}$.
 (ب) $w = (1 + i)z + 2 + 2i$.
 (ج) $w = \frac{z-1}{z+1}$.
 (د) $w = (z - 2i)^3 + 2 - i$.

مسئله ۱۲. نقاط ثابت نگاشت‌های زیر را بیابید.

- (آ) $w = \frac{2z-i}{z+2i}$.
 (ب) $w = (z - i)^2 + 1 - i$.
 (ج) $w = z^3$.
 (د) $w = (z + i)^3 - i$.

مسئله ۱۳. با روش هندسی تصویر میدان $|z - 1| < 1$ را تحت هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

- (آ) $w = (1 - i)z + 2 - i$.
 (ب) $w = \frac{1}{z}$.
 (ج) $w = \frac{z-2}{z}$.
 (د) $w = \frac{z-i}{z+1}$.

مسئله ۱۴. نگاشت مبیوسی را بیابید که نقاط داده شده را بر نقاط داده شده بنگارد.

- (آ) $0, 1$ و i را بر $0, 1$ و ∞ و i را بر $0, 1$ و ∞ و $-i$ را بر $0, 1$ و 2 .
 (ب) $0, 1$ را بر $0, 1$ و $-i$ را بر $0, 1$ و i را بر $0, 1$ و 2 .
 (ج) $0, 1$ و i را بر $0, 1$ و ∞ و $-i$ را بر $0, 1$ و 2 .
 (د) $0, 1$ و i را بر $0, 1$ و 2 و $-i$ را بر $0, 1$ و 2 .

مسئله ۱۵. نگاشت مبیوسی را بیابید که $|z| < 1$ را بر $|w| < 1$ و نقطه $\frac{1}{2}$ را به 0 و نقطه 1 را بر i بنگارد.

- مسئله ۱۶.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, 1 < y < x\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و هم‌دیس بر دایره واحد بنگارید.
- مسئله ۱۷.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : x < 1, \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و هم‌دیس بر دیسک واحد بنگارید.
- مسئله ۱۸.** تصویر $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0, xy < \frac{\pi}{4}\}$ را تحت نگاشت $w = e^{z^2}$ بیابید.
- مسئله ۱۹.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0, r < 1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و هم‌دیس بر نیم صفحه بالائی بنگارید.
- مسئله ۲۰.** میدان $\{z : y > 0\} \setminus \{x = 0, 0 < y < 1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.
- مسئله ۲۱.** میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z - 1| = 1$ را به صورت یک به یک و پوشا و هم‌دیس بر نیم صفحه بالائی بنگارید.
- مسئله ۲۲.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : y > 0, r < 1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و هم‌دیس بر ربع اول بنگارید.
- مسئله ۲۳.** میدان $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, y > -1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.
- مسئله ۲۴.** میدان بین دایره $|z| = 3$ و خط $x + y = 5\sqrt{2}$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.
- مسئله ۲۵.** میدان بین دو دایره $|z| = 2$ و $|z - 5| = 2$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.
- مسئله ۲۶.** نگاشت مبیوسی را بیابید که میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ را بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارد.
- مسئله ۲۷.** مسائل پوآسن همراه با شرایط مرزی داده شده را حل کنید.

آ.

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x > 0, y > 0,$$

$$T \Big|_{y=0} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad T \Big|_{x=0} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

ب.

$$T_{xx} + T_{yy} = xy,$$

$$D = \{z : 1 - \frac{1}{4}y^2 < x < 4 - \frac{1}{16}y^2, \frac{1}{16}y^2 - 4 < x < \frac{1}{4}y^2 - 1\},$$

$$T \Big|_{\partial D} = xy.$$

ج.

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$D = \{z : |z| < 1, x > 0, y > 0\},$$

$$T \Big|_{x=0} = y, \quad T \Big|_{y=0} = x, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0.$$

د.

$$T_{xx} + T_{yy} = x + y,$$

$$D = \{z : |z-1| < 1, |z-i| < 1\},$$

$$T \Big|_{\partial D} = xy.$$

مسئله ۲۸. میدان D را میدان بین خط $x+y = 5\sqrt{2}$ و دایره $|z| = 4$ در نظر بگیرید. مسئله پواسن زیر را روی D حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = xy, \quad (x, y) \in D$$

$$T \Big|_{\partial D} = xy.$$

مسئله ۲۹. مسئله پواسن زیر را روی میدان $D = \{z : |z-5| > 2, |z| > 2\}$ حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = xy,$$

$$T \Big|_{\partial D} = x + y.$$

مسئله ۳۰. مسئله پواسن زیر را روی میدان $D = \{z : |z| < 1, |z - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}\}$ حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = x + y,$$

$$T \Big|_{\partial D} = x^2 - y^2.$$