معادلات دیفرانسیل **(زمستان ۹۹)**

تمرین سری سوم

مدرسان: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین ۱

نشان دهید هر جواب معادله

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay = be^{-ct}$$

که در آن a و c اعداد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی دلخواهی هستند، در بینهایت به صفر میل می‌کند.

تمرین ۲

معادله دیفرانسیل $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = f(t)$ که در آن $a(t)$ و $f(t)$ توابعی پیوسته روی اعداد حقیقی و $a(t) > c > ۰$ و $\lim_{t\to\infty} f(t) = ۰$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر جواب معادله در زمان بینهایت به صفر همگراست.

تمرین ۳

آ) ثابت کنید $\phi(t) = e^{۲t}$ جواب معادله $y' - ۲y = ۰$ است و به ازای هر مقدار ثابت c، $y = c\phi(t)$ هم جواب این معادله است.

ب) ثابت کنید به ازای $t > ۰$، $\phi(t) = \frac{۱}{t}$ جواب معادله $y' + y^۲ = ۰$ است. اما $y = c\phi(t)$ جواب این معادله نیست، مگر $c = ۰$ یا $c = ۱$.

ج) با توجه به دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای در مورد تفاوت دو معادله می‌گیرید؟

تمرین ۴

معادله دیفرانسیل

$$t^۲y' + ۲ty - y^۳ = ۰, \quad t > ۰$$

را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

تمرین ۵

مساله مقدار اولیه $y' + p(t)y = ۰,\ y(۰) = ۱$ را در نظر بگیرید که در آن

$$p(t) = \begin{cases} ۲t & ۰ \le t \le ۱ \\ ۳ & ۱ < t \end{cases}$$

است. جواب این مساله مقدار اولیه را روی تمام اعداد حقیقی مثبت بیابید (دقت کنید چنین جوابی در تمام نقاط دارای مشتق پیوسته نیست).

تمرین ۶

آ) نشان دهید معادله‌ی

$$(e^x \sin y - ۲y \sin x)\mathrm{d}x + (e^x \cos y + ۲ \cos x)\mathrm{d}y = ۰$$

کامل است، سپس آن‌را حل کنید.

ب) ابتدا نشان دهید معادله‌ی

$$y\mathrm{d}x + (۲x - ye^y)\mathrm{d}y = ۰$$

کامل نیست، اما با ضرب در عامل انتگرال‌ساز $\mu(x, y) = y$ معادله را کامل کرده و آن‌را حل کنید.

تمرین ۷

ثابت کنید اگر $R = \frac{(N_x - M_y)}{(xM - yN)}$، که در آن R تنها به xy بستگی دارد، معادله‌ی دیفرانسیل $M + Ny' = ۰$ عامل انتگرال‌سازی به‌صورت $\mu(xy)$ دارد. یک فرمول کلی برای این عامل انتگرال‌ساز بیابید.

تمرین ۸

با یافتن عامل انتگرال‌ساز مناسب، هر یک از معادلات زیر را کامل کرده و آن‌را حل کنید.

آ) $e^x\mathrm{d}x + (e^x \cot y + ۲y \csc y)\mathrm{d}y = ۰$.

ب) $(۳xy + y^۲) + (x^۲ + xy)y' = ۰$.

تمرین ۹

با استفاده از عامل انتگرال‌ساز $\mu(x, y) = [xy(۲x + y)]^{-۱}$ قسمت دوم سوال ۸ را کامل کرده و آن‌را حل کنید.