بسمه تعالی

سوال ۱ فرض کنید $z = x + iy$ عددی مختلط باشد. عبارت های زیر را بر حسب x, y محاسبه کنید.

- الف)

$$\mathrm{Im}(\frac{۱}{\overline{z}^۲})$$

- ب)

$$\mathrm{Re}(z^۴) - (\mathrm{Re}(z^۲))^۲$$

- ج)

$$\mathrm{Re}((۱+i)^{۱۶}z^۲)$$

تمرینات مشابه : مسائل ۱۶ و ۱۹ و ۲۰ از صفحه ۶۱۳ کتاب درسی.

سوال ۲ ریشه های سوم اعداد مختلط $z_۱ = ۳ + ۴i$ و $z_۲ = ۲۱۶$ و $z_۳ = ۱ + i$ را بدست آورید.

تمرینات مشابه : مسائل ۲۴ و ۲۶ و ۲۷ از صفحه ۶۱۸ کتاب درسی.

سوال ۳ معادلات زیر را حل کنید.

- الف)

$$z^۲ - (۶ - ۲i)z + ۱۷ - ۶i = ۰$$

- ب)

$$z^۴ - ۶iz^۲ + ۱۶ = ۰$$

تمرینات مشابه : مسائل ۲۹ و ۳۰ از صفحه ۶۱۸ کتاب درسی.

سوال ۴ مشخص کنید که هریک از توابع مختلط داده شده به ازای چه مقادیری از z مشتق پذیر هستند.

- الف)

$$f(z) = |z|^۲$$

- ب)

$$f(z) = iz\bar{z}$$

- ج)

$$f(z) = \mathrm{Re}(z^{۲}) - i\mathrm{Im}(z^{۲})$$

- د)

$$f(z) = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{۲}}$$

- و)

$$f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\sin(\ln r)$$

یادآوری: فرم دکارتی معادلات کشی- ریمان:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y): \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

فرم قطبی معادلات کشی- ریمان:

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta): \quad r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

تمرینات مشابه : مسائل ۸ و ۱۰ و ۱۱ از صفحه ۶۲۹ کتاب درسی.

سوال ۵ نشان دهید مجموعه مقادیر $\ln(i^{۲})$ و مجموعه مقادیر $۲\ln(i)$ با یکدیگر متفاوت هستند.

سوال ۶ مقادیر اصلی هرکدام از عبارات داده شده را حساب کنید.

- الف)

$$(۲i)^{۲i}$$

- ب)

$$(۱-i)^{۱+i}$$

- ج)

$$(-۳)^{۳-i}$$

تمرینات مشابه : مسائل ۱۳ و ۱۴ و ۲۳ از صفحه ۶۴۰ کتاب درسی.

سوال ۷ حاصل هرکدام از انتگرال های زیر را بدست آورید.

- الف)

$$\int_C \mathrm{Re}(z)dz$$

که در آن C سهمی $y = ۱ + \frac{۱}{۲}(x-۱)^۲$ است که نقطه شروع حرکت روی این سهمی نقطه $۱ + i$ و نقطه پایان نیز نقطه $۳ + ۳i$ است.

- ب)

$$\int_C e^z dz$$

که در آن C کوتاهترین مسیر از πi تا $۲\pi i$ است.

- ج)

$$\int_C (\frac{۵}{z-۲i} - \frac{۶}{(z-۲i)^۲})dz$$

که در آن C دایره به مرکز $۲i$ و شعاع ۴ است که در جهت ساعتگرد جهتدهی شده است.

- د)

$$\int_C \cos(۲z)dz$$

که در آن C نیم دایره $|z| = \pi$ است که $x \geq ۰$ و جهت حرکت روی این نیم دایره از $-\pi i$ تا πi است.

تمرینات مشابه : مسائل ۲۵ و ۲۷ و ۲۹ از صفحه ۶۵۱ کتاب درسی.

سوال ۸ حاصل هرکدام از انتگرال های زیر را بدست آورید.

- الف)

$$\oint_C \frac{dz}{z-۳i}$$

که در آن C دایره به مرکز مبدا و شعاع π است که در جهت مثلثاتی جهت دهی شده است.

- ب)

$$\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$$

که در آن C دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

- ج)

$$\oint_C \frac{\sin z}{z+۲iz} dz$$

که در آن C دایره $|z-۴-۲i| = \frac{۱۱}{۲}$ است که بطور ساعتگرد جهت دهی شده است.

- د)

$$\oint_C \frac{dz}{z^۲+۴}$$

که در آن C بیضی $۴x^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$ است که بصورت مثلثاتی جهت دهی شده است.

تمرینات مشابه : مسائل ۲۴ و ۲۵ و ۲۶ از صفحه ۶۶۰ کتاب درسی.

سوال ۹ فرض کنید C یک خم ساده و بسته دلخواه باشد که اعداد مختلط $z_۱, z_۲$ درون آن واقع باشند. نشان دهید:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_۱)(z-z_۲)} = ۰$$