سری چهارم تمرین‌ها

درس ریاضی مهندسی

پاییز ۹۹

بسمه تعالی

سوال ۱ مسائل مقدار اولیه زیر را با استفاده از روش تبدیل فوریه حل کنید.

- الف)

$$\begin{cases} tu_x + u_t = 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x) \qquad\qquad\qquad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

که در آن f تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ است.

- ب)

$$\begin{cases} u_t = e^{-t} u_{xx} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = e^{-|x|} \qquad\qquad\qquad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

- ج)

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{txx} + 3u_{xxxx} = 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x) \qquad\qquad\qquad -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = g(x) \qquad\qquad\qquad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

که در آن f, g توابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ هستند.

- د)

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + k u_x \quad , \quad t > 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x) \qquad\qquad\qquad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

که در آن f تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ است. فرض کنید تبدیل فوریه f وجود داشته باشد.

سوال ۲ فرض کنید f, g توابعی پیوسته روی بازه $[۰,۱]$ باشند. جواب مسئله مقدار مرزی- مقدار اولیه زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-2t}g(x) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u_x(0,t) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0 \\ u_x(1,t) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < 1 \end{cases}$$

سوال ۳

- الف) (مسئله مقدار ویژه برای لاپلاسین روی ناحیه ای مستطیل شکل) فرض کنید a, b اعدادی مثبت باشند. قرار دهید $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مسئله زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \lambda u = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

- ب) (انتشار موج روی ناحیه ای مستطیل شکل) فرض کنید a, b, c اعدادی مثبت باشند. فرض کنید Ω مستطیلی با اضلاع a, b باشد یعنی $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. فرض کنید f, g توابعی پیوسته روی Ω باشند. جواب مسئله مقدار مرزی- مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \nabla^2 u \quad , \qquad t > 0 \quad , \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,t) = 0 \qquad t > 0 \quad , \quad (x,y) \in \partial\Omega \\ u(x,y,0) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

- ج) (انتقال حرارت روی ناحیه ای مستطیل شکل) فرض کنید a, b, c اعدادی مثبت باشند. فرض کنید Ω مستطیلی با اضلاع a, b باشد یعنی $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. فرض کنید f تابعی پیوسته روی Ω باشند. جواب مسئله مقدار مرزی- مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} u_t = c^۲\nabla^۲ u \quad , & t > ۰ \quad , \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,t) = ۰ & t > ۰ \quad , \quad (x,y) \in \partial\Omega \\ u(x,y,۰) = f(x,y) & (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

سوال ۴

- الف) (مسئله مقدار ویژه برای لاپلاسین روی دیسک) فرض کنید $D(۰,r)$ دیسکی به مرکز مبدا و شعاع r در $\mathbb{R}^2$ باشد. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مسئله زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \nabla^۲ u + \lambda u = ۰ & (x,y) \in D(۰,r) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = ۰ & (x,y) \in \partial D(۰,r) \end{cases}$$

که در آن $\vec{n}$ بردار نرمال یکه برون سو روی مرز $D(۰,r)$ (که در راستای شعاعی است) می باشد.

پیشنهاد: از مختصات قطبی استفاده کنید.

- ب) (انتشار موج روی دیسک) فرض کنید $D(۰,r)$ دیسکی به مرکز مبدا و شعاع r در $\mathbb{R}^2$ باشد. فرض کنید f,g توابعی پیوسته روی $D(۰,r)$ باشند و c عددی مثبت باشد. جواب مسئله مقدار مرزی-مقدار اولیه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^۲\nabla^۲ u \quad , & t > ۰ \quad , \quad (x,y) \in D(۰,r) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = ۰ & (x,y) \in \partial D(۰,r) \\ u(x,y,۰) = f(x,y) & (x,y) \in D(۰,r) \\ u_t(x,y,۰) = g(x,y) & (x,y) \in D(۰,r) \end{cases}$$

- ج) (انتقال حرارت روی دیسک) فرض کنید $D(۰,r)$ دیسکی به مرکز مبدا و شعاع r در $\mathbb{R}^2$ باشد. فرض کنید f تابعی پیوسته روی $D(۰,r)$ باشند و c عددی مثبت باشد. جواب مسئله مقدار مرزی-مقدار اولیه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} u_t = c^۲\nabla^۲ u \quad , & t > ۰ \quad , \quad (x,y) \in D(۰,r) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = ۰ & (x,y) \in \partial D(۰,r) \\ u(x,y,۰) = f(x,y) & (x,y) \in D(۰,r) \end{cases}$$

یادآوری: در مختصات قطبی لاپلاسین عبارت است از:

$$\nabla^۲ u = \frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial \theta^۲}$$

سوال ۵

- الف) (مسئله مقدار ویژه برای لاپلاسین در گوی سه بعدی) فرض کنید $B(\circ, r)$ گوی به مرکز مبدا و شعاع r در $\mathbb{R}^3$ باشد. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مسئله زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \nabla^۲ u + \lambda u = \circ & (x,y) \in B(\circ, r) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \circ & (x,y) \in \partial B(\circ, r) \end{cases}$$

که در آن $\vec{n}$ بردار نرمال یکه برون سو روی مرز $B(\circ, r)$ (که در راستای شعاعی است) می باشد.

پیشنهاد: از مختصات کروی استفاده کنید

- ب) (انتشار موج در گوی سه بعدی) فرض کنید $B(\circ, r)$ گوی به مرکز مبدا و شعاع r در $\mathbb{R}^3$ باشد. فرض کنید f, g توابعی پیوسته روی $B(\circ, r)$ و c عددی مثبت باشد. مسئله مقدار مرزی-مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^۲ \nabla^۲ u \quad , & t > \circ \quad , \quad (x,y,z) \in B(\circ, r) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \circ & (x,y,z) \in \partial B(\circ, r) \\ u(x,y,z,\circ) = f(x,y,z) & (x,y,z) \in B(\circ, r) \\ u_t(x,y,,z\circ) = g(x,y,z) & (x,y,z) \in B(\circ, r) \end{cases}$$

- ج) (انتقال حرارت در گوی سه بعدی) فرض کنید $B(\circ, r)$ گوی به مرکز مبدا و شعاع r در $\mathbb{R}^3$ باشد. فرض کنید f تابعی پیوسته روی $B(\circ, r)$ و c عددی مثبت باشد. مسئله مقدار مرزی-مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = c^۲ \nabla^۲ u \quad , & t > \circ \quad , \quad (x,y,z) \in B(\circ, r) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \circ & (x,y,z) \in \partial B(\circ, r) \\ u(x,y,\circ) = f(x,y,z) & (x,y) \in B(\circ, r) \end{cases}$$

یادآوری: در مختصات کروی لاپلاسین عبارت است از:

$$\nabla^۲ u = \frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲} + \frac{۲}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial \theta^۲} + \cot\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \csc^۲\theta \frac{\partial^۲ u}{\partial \phi^۲}\right)$$

سوال ۶

- الف) (مسئله مقدار ویژه لاپلاسین در ناحیه استوانه ای شکل) فرض کنید:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le r^2, \quad 0 < z < a\}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مسئله زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \lambda u = 0 & (x,y) \in C \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & (x,y) \in \partial C \end{cases}$$

که در آن $\vec{n}$ بردار نرمال برون سو روی مرز C است.

پیشنهاد: از مختصات استوانه ای استفاده کنید

- ب) (انتشار موج در ناحیه استوانه ای شکل) فرض کنید C همانند قسمت (الف) تعریف شده باشد و c عددی مثبت و f, g توابعی پیوسته روی C باشند. مسئله مقدار مرزی-مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \nabla^2 u \quad , & t > 0 \quad , \quad (x,y,z) \in C \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & (x,y,z) \in \partial C \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z) & (x,y,z) \in C \\ u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z) & (x,y,z) \in C \end{cases}$$

- ج) (انتقال حرارت در ناحیه استوانه ای شکل) فرض کنید C همانند قسمت (الف) تعریف شده باشد و c عددی مثبت و f تابعی پیوسته روی C باشند. مسئله مقدار مرزی-مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = c^2 \nabla^2 u \quad , & t > 0 \quad , \quad (x,y,z) \in C \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & (x,y,z) \in \partial C \\ u(x,y,0) = f(x,y,z) & (x,y) \in C \end{cases}$$

یادآوری: لاپلاسین در مختصات استوانه ای عبارت است از:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

سوال ۷ مسائل مقدار مرزی- مقدار اولیه زیر را حل کنید.

- الف)

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{\pi^2}\nabla^2 u \quad , & t>0 \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1 \\ u(0,y,t)=u(1,y,t)=0 & t>0 \quad , \quad 0<y<1 \\ u(x,0,t)=u(x,1,t)=0 & t>0 \quad , \quad 0<x<1 \\ u(x,y,0)=x(1-x)y(1-y) & 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1 \end{cases}$$

- ب)

$$\begin{cases} u_{tt} = \nabla^2 u \quad , & t>0 \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1 \\ u(0,y,t)=u(1,y,t)=0 & t>0 \quad , \quad 0<y<1 \\ u(x,0,t)=u(x,1,t)=0 & t>0 \quad , \quad 0<x<1 \\ u(x,y,0)=\sin(xy)\cos(\frac{\pi x}{2})\sin\pi y & 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1 \\ u_t(x,y,0)=0 & 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1 \end{cases}$$

سوال ۸ مسائل مقدار مرزی- مقدار اولیه زیر را حل کنید.

- الف)

$$\begin{cases} u_{tt} = 4\nabla^2 u \quad , & t>0 \quad , \quad x^2+y^2\le 1 \\ u(x,y,t)=0 & t>0 \quad , \quad x^2+y^2=1 \\ u(x,y,0)=1-x^2-y^2 & x^2+y^2\le 1 \\ u_t(x,y,0)=1 & x^2+y^2\le 1 \end{cases}$$

• ب)

$$\begin{cases} u_{tt} = \nabla^۲ u \quad , & t > ۰ \quad , \quad x^۲ + y^۲ \leq ۱ \\ u(x,y,t) = ۰ & t > ۰ \quad , \quad x^۲ + y^۲ = ۱ \\ u(x,y,۰) = J_۰(\alpha_۳ r) & x^۲ + y^۲ \leq ۱ \\ u_t(x,y,۰) = ۱ - r^۲ & x^۲ + y^۲ \leq ۱ \end{cases}$$

که در آن $J_۰$ تابع بسل مرتبه صفر و $\alpha_۳$ سومین ریشه مثبت $J_۰$ و $r^۲ = x^۲ + y^۲$ هستند.

• ج)

$$\begin{cases} u_{tt} = ۴\nabla^۲ u \quad , & t > ۰ \quad , \quad x^۲ + y^۲ \leq ۱ \\ u(x,y,t) = ۰ & t > ۰ \quad , \quad x^۲ + y^۲ = ۱ \\ u(x,y,۰) = (۱ - r^۲) r^۲ \sin ۲\theta & x^۲ + y^۲ \leq ۱ \\ u_t(x,y,۰) = ۰ & x^۲ + y^۲ \leq ۱ \end{cases}$$

سوال ۹ مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^۲ u_{xx} + f(x,t) \quad , \quad t > ۰ \quad , & -\infty < x < \infty \\ u(x,۰) = g(x) & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,۰) = h(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

با استفاده از جایگذاری نشان دهید جواب مسئله فوق از طریق رابطه زیر حاصل می شود.

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[g(x+ct) + g(x-ct)] + \frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\chi) d\chi + \frac{۱}{۲c}\int_۰^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\chi, s) d\chi ds$$