



بسمه تعالی

سری اول تمرین‌ها
درس ریاضی مهندسی
پاییز ۹۹

سوال ۱

• الف) فرض کنید تابع f متناوب با دوره تناوب p باشد و فرض کنید a, b دو عدد مثبت باشند. نشان دهید توابع $h(x) = f(ax)$ و $g(x) = f(x/b)$ نیز متناوب هستند و یک دوره تناوب برای آنها بیابید.

• ب) منظور از دوره تناوب اساسی تابعی مانند f کوچکترین عدد مثبتی مانند T است به قسمی که برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$. دوره تناوب اساسی هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

(۱ -

$$f(x) = \cos ax, \quad a > 0$$

(۲ -

$$f(x) = \sin \frac{2\pi x}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(۳ -

$$f(x) = 1$$

تمرینات مشابه : مسئله ۳ از صفحه ۴۸۲ کتاب درسی.

سوال ۲

در هر یک از قسمت های زیر تابع داده شده دارای دوره تناوب 2π است و ضابطه آن روی یک دوره تناوب آن داده شده است. سری فوریه آن را بدست بیاورید.

• الف)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

• ب)

$$f(x) = x^2, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

• (ج)

$$f(x) = \begin{cases} e^x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

تمرینات مشابه : مسائل ۸ و ۱۰ از صفحه ۴۸۲ کتاب درسی.

سوال ۳

در مسائل زیر تابع داده شده دارای دوره تناوب p است و ضابطه آن بر روی بازه‌ای به طول p داده شده است. سری فوریه آن را بیابید.

• (الف)

$$f(x) = x|x|, \quad -1 \leq x < 1, \quad p = 2$$

• (ب)

$$f(x) = \cos^2 \pi x, \quad -\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}, \quad p = 1$$

• (ج)

$$f(x) = e^x, \quad -2 \leq x < 2, \quad p = 4$$

تمرینات مشابه : مسائل ۱۲ و ۱۹ از صفحه ۴۹۱ کتاب درسی.

سوال ۴

فرض کنید $0 < \delta < \pi$ و f تابعی با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi]$ با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\delta \\ 1 & -\delta \leq x \leq \delta \\ 0 & \delta < x \leq \pi \end{cases}$$

• (الف) سری فوریه f را بیابید.

• (ب) از قضیه همگرایی سری های فوریه استفاده کنید و تساوی زیر را نتیجه بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

• (ج) از اتحاد پارسوال استفاده کنید و تساوی زیر را نتیجه بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2 \delta} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

- الف) فرض کنید f تابعی با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[0, 2\pi)$ با ضابطه $f(x) = x$ تعریف شده است. سری فوریه f را بیابید و با استفاده از اتحاد پارسوال نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- ب) فرض کنید f تابعی با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi]$ با ضابطه $f(x) = (\pi - |x|)^2$ تعریف شده است. سری فوریه f را یافته و با استفاده از اتحاد پارسوال نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

همچنین نتیجه قسمت الف) را با استفاده از قضیه همگرایی سری های فوریه بازیابی کنید.

- ج) فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi)$ با ضابطه $f(x) = x^3$ تعریف شده است. سری فوریه f را بیابید و با استفاده از اتحاد پارسوال و نتایج قسمت های الف) و ب) رابطه زیر را نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

- سوال ۶) فرض کنید a عددی ناصفر باشد و فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi)$ با ضابطه $f(x) = e^{ax}$ تعریف شده است. سری فوریه f را یافته و با استفاده از قضیه همگرایی سری های فوریه تساوی زیر را نتیجه بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \coth(\pi a)}{2a} - \frac{1}{2a^2}$$

- سوال ۷) فرم کلی جواب معادلات دیفرانسیل خطی زیر را بدست آورید.

الف) •

$$y'' + \omega^2 y = r(t)$$

- که در آن ω عددی مثبت بوده و $r(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است که روی بازه $[-\pi/2, 3\pi/2)$ با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$r(t) = \begin{cases} t & -\pi/2 \leq t < \pi/2 \\ \pi - t & \pi/2 \leq t < 3\pi/2 \end{cases}$$

• (ب)

$$y'' + cy' + y = r(t)$$

که در آن c عددی مثبت بوده و :

$$r(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

تمرینات مشابه : مسائل ۶ و ۷ از صفحه ۴۹۴ کتاب درسی.

سوال ۸ در هر یک از مسائل اشتورم- لیوویل زیر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آنها را بدست آورید:

• (الف)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

• (ب)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

• (ج)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l)$$

سوال ۹ مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + fy' + (g + \lambda h)y = 0$$

نشان دهید با قرار دادن $p = \exp\left(\int f dx\right)$ و $q = pg$ و $r = hp$ مسئله فوق به مسئله:

$$[py']' + [q + \lambda r]y = 0$$

تبدیل می شود. با استفاده از این نکته مسائل اشتورم- لیوویل زیر را حل کنید.

• (الف)

$$y'' - 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

• (ب)

$$y'' + 8y' + (\lambda + 16)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

سوال ۱۰

مسئله اشتورم- لیوویل زیر را با استفاده از تعویض پارامتر $x = e^t$ حل کنید.

$$(y'/x)' + (\lambda + 1)y/x^\lambda = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e^\pi) = 0$$

سوال ۱۱

در هر یک از قسمت های زیر تابع داده شده را بصورت یک انتگرال فوریه کسینوسی نمایش دهید.

• الف)

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

• ب)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t < a \\ 0 & t \geq a \end{cases}$$

تمرینات مشابه : مسئله ۹ از صفحه ۵۱۷ کتاب درسی.

سوال ۱۲

در هر یک از قسمت های زیر تابع داده شده را بصورت یک انتگرال فوریه سینوسی نمایش دهید.

• الف)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

• ب)

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

سوال ۱۳

درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

• الف)

$$\int_0^\infty \frac{w^x \sin(xw)}{w^4 + 4} dw = \frac{1}{4} \pi e^{-x} \cos x, \quad x > 0$$

• (ب)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi w) \sin(xw)}{1-w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

• (ج)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi w) \cos(xw)}{1-w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تمرینات مشابه : مسئله ۱ از صفحه ۵۱۷ کتاب درسی.