معادلات دیفرانسیل **(پاییز ۹۹)**

سری هشتم تمرینات

مدرس: دکتر بحرینی، دکتر جعفری *دستیاران آموزشی:* مسعود بیرامی، علی آل‌درویش

تمرین۱

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

آ)

$$\mathscr{L}(u(t-a)e^t)$$

ب)

$$\mathscr{L}(u(t-\pi)\cos(t))$$

ج)

$$\mathscr{L}(u(t-۲)te^{-t})$$

تمرین۲

برای هر یک از توابع زیر، ابتدا تابع را رسم کنید، سپس مشتق آن را رسم کنید و در آخر فرمول تابع و مشتق آنرا بر حسب توابعی مانند $u(t-a)$ و $\delta(t-a)$ و غیره بیان کنید. (ممکنه است چند نقطه تعریف نشده باشند.)

آ)

$$f(t)=\begin{cases}۰ & t<۰\\ -t & t>۰\end{cases}$$

ب)

$$f(t)=\begin{cases}۰ & t<۰\\ ۱-t & t>۰\end{cases}$$

ج)

$$f(t)=\begin{cases}۰ & t<۰ \quad و \quad t>۱\\ ۲t-۱ & ۰<t<۱\end{cases}$$

د)

$$f(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ t - [t] & t > ۰ \end{cases}$$

تمرین۳

آ) پاسخ ضربه [1] واحد w را برای اپراتور $۲D^۲ + ۴D + ۴I$ بیابید.

ب) پاسخ پله [2] واحد v را برای همان اپراتور محاسبه کنید.

ج) نشان دهید که $v' = w$. (همانطور که باید باشد زیرا $u' = \delta$)

د) برای هر یک از توابع زیر، اپراتور مشتق $p(D)$ را پیدا کنید که هرکدام را به عنوان پاسخ ضربه داشته باشد.

$$۲u(t), \qquad u(t)t, \qquad u(t)t^۲,$$

تمرین۴

آ) پاسخ ضربه و پاسخ پله را برای اپراتور مرتبه اول $aD + bI$ با تبدیل مساله به یک مساله دامنه ارتعاشی، (تبدیل لاپلاس) و حل آن در آنجا و سپس برگردان آن به دامنه زمانی بیابید.

ب) معادله دیفرانسیل $ax' + bx = t$ با شرط اولیه سکون [3] با سه روش مختلف حل کنید.

آ) با استفاده از ضرایب نامعین x_p را به دست آورید و سپس مقدار با افزودن عبارت مناسبی گذرا، مساله را حل کنید.

ب) مقدار $\omega(t) * t$ را محاسبه کنید. (از قسمت الف استفاده کنید)

ج) با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله را تبدیل کرده، حل کنید و سپس وارون لاپلاس بگیرید.

تمرین۵

پاسخ ضربه واحد را با استفاده از تبدیل لاپلاس برای اپراتورهای زیر محاسبه کنید.

$$۳D^۲ + ۶D + ۶I, \qquad D^۴ + I$$

[1] impulse response
[2] step response
[3] rest initial condition

تمرین۶

، مساله مقدار اولیه

$$y" + ۲y' + y = \delta(t) + u(t-۱) \qquad y(۰) = ۰, \quad y'(۰_-) = ۱$$

را حل کنید و جواب را بصورت $y(t) = \begin{cases} \dots & -\leq t \leq ۱ \\ \dots & t > ۱ \end{cases}$

تمرین۷

فرض کنید که برای هر $t \leq ۰$ داریم $f(t) = ۰$ با استفاده از تعریف پیچش شرح دهید که $\delta(t) * f(t) = f(t)$ سپس همین کار را با استفاده از $\delta(t)$ انجام دهید. (در بخش . کتاب، $\delta(t)$ بصورت $\delta_۰(t)$ نوشته شده است.)

تمرین۸

آ) قرار دهید $q(t) = \cos(\omega t)$ عبارت $\omega(t) * q(t)$ را محاسبه کنید. ($\omega(t)$ پاسخ ضربه واحد برای اپراتور $D^۲ + {\omega_n}^۲ I$ میباشد.) و سپس چک کنید که این عبارت جواب مساله $x' + kx = q(t)$ با شرط اولیه سکون است.

ب) قرار دهید $q(t) = ۱$ عبارت $\omega(t) * q(t)$ را محاسبه کنید. ($\omega(t)$ پاسخ ضربه واحد برای اپراتور $D^۲ + {\omega_n}^۲ I$ میباشد.) و سپس چک کنید که این عبارت جواب مساله $x'' + {\omega_n}^۲ x = q(t)$ با شرط اولیه سکون است.

تمرین۹

به فرض

$$y'' + by' + ay = r(t), \qquad y(۰) = y'(۰) = ۰$$

$$W(s) = \frac{۱}{s^۲ + as + b} = \quad \text{تابع انتقال برای } p(D)$$

$$\omega(t) = \mathscr{L}^{-۱}(W(s)) = \quad \text{تابع وزن برای } p(D)$$

$$G(t,u) = \omega(t-u) = \quad \text{تابع گرین برای } p(D)$$

ثابت کنید که تابع $\omega(t)$ جواب یکتای مساله مقدار اولیه

$$y" + ay' + by = ۰ \qquad y(۰) = ۰ \quad y'(۰) = ۱$$

یا مساله مقدار اولیه

$$y'' + ay' + by = \delta(t) \qquad y(0) = 0 \quad y'(0_-) = 0$$

می باشد. در مساله دوم $\delta(t)$ تابع دلتای دیراک می باشد. هر دو مساله مقدار اولیه مدل های جرم و فنر با اتلاف می باشند که در شرط اولیه سکون هستند و در زمان صفر یک ضربه یکه به جسم وارد می شود و a و b هر دو مثبت می باشند.